

1. Odwołując się wprost do definicji, uzasadnić, że następujące funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ są rekurencyjne:
 - (a) $f(n) = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$,
 - (b) $f(n)$ = liczba liczb pierwszych mniejszych od n .
 - (c) $f(n)$ = liczba liczb mniejszych od n , względnie pierwszych z n .
2. (a) Załóżmy, że $A, B \subseteq \Sigma^*$ są rekurencyjne. Udowodnić, że $A \cup B$, $A^c = \Sigma^* \setminus A$ i $A \cap B$ też są rekurencyjne.
 (b) Załóżmy, że $A, B \subseteq \Sigma^*$ są rekurencyjnie przeliczalne. Udowodnić, że $A \cup B$ i $A \cap B$ też są rekurencyjnie przeliczalne (uwaga: A^c niekoniecznie!).
3. (a) Załóżmy, że $A \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem rekurencyjnym nieskończonym. Opisać algorytm, który oblicza funkcję rekurencyjną całkowitą $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taką, że f jest rosnąca i $f[\mathbb{N}] = A$.
 (b) Załóżmy, że $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją rekurencyjną całkowitą rosnącą oraz $A = f[\mathbb{N}]$. Udowodnić, że A jest zbiorem rekurencyjnym.
4. Załóżmy, że $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ jest bijekcją i jest rekurencyjna oraz $A \subseteq \Sigma^*$.
 (a) Udowodnić, że f^{-1} też jest rekurencyjna.
 (b) Udowodnić, że A jest rekurencyjny $\iff f[A]$ jest rekurencyjny.
5. Załóżmy, że $\Sigma \neq \emptyset$. Udowodnić, że zbiór Σ^* jest przeliczalny (wsk: ustawić wszystkie słowa w ciąg).
6. Załóżmy, że $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ jest rekurencyjna.
 (a) Udowodnić, że $Dom(f)$ jest rekurencyjnie przeliczalny.
 (b) Udowodnić, że wykres f , tzn. zbiór $\{\langle x, y \rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^* : f(x) = y\}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, zaś gdy f jest ponadto całkowita — rekurencyjny.
7. (a) Załóżmy, że $A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Udowodnić, że rzut zbioru A na pierwszą oś jest rekurencyjnie przeliczalny.
 (b) Załóżmy, że $B \subseteq \Sigma^*$ jest rekurencyjnie przeliczalny. Udowodnić, że istnieje rekurencyjny zbiór $A \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ taki, że B jest rzutem A na pierwszą oś. Udowodnić, że istnieje taki zbiór $A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ (wsk: osłuzić się odpowiednią rekurencyjną bijekcją).
8. Załóżmy, że M jest jednotaśmową (dla uproszczenia) maszyną Turinga oraz $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest funkcją (całkowitą) taką, że dla każdego słowa wejściowego w , w swoim działaniu M używa nie więcej niż $f(|w|)$ komórek taśmy. Udowodnić, że język $L(M)$ jest rekurencyjny. (wsk: np. skonstruować maszynę N równoważną M , która się zawsze zatrzymuje)
9. Udowodnić, że następujące funkcje są rekurencyjne.
 (a) $f(n)$ = liczba nieizomorficznych grup rzędu n .
 (b) $f(n)$ = liczba podprzestrzeni n -wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem 3-elementowym.
 (c) $f(n)$ = n -ta liczba pierwsza.
 (d) $f(n)$ = n -ta cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby π .
 (e) $f(n)$ = n -ta cyfra rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$. (wsk: w każdym przypadku wystarczy zaprojektować maszynę Turinga obliczającą daną funkcję. Warto jednak uświadomić sobie, że każda z tych funkcji można zdefiniować wychodząc od bazowych funkcji rekurencyjnych i stosując operacje złożenia, rekursji prostej i minimum.)
10. * Załóżmy, że $A \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjnie przeliczalny i nieskończony. Udowodnić, że istnieje zbiór $B \subseteq A$ taki, że B jest rekurencyjnie przeliczalny, zaś $A \setminus B$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.