

1. (a) Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Wskazać zbiór $C \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $A \leq_T C$ i $B \leq_T C$.
(b) Załóżmy, że $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest rodziną zbiorów liczb naturalnych. Wskazać zbiór $C \subseteq \mathbb{N}$ taki, że dla każdego n , $A_n \leq_T C$.
2. * Klasę funkcji pierwotnie rekurencyjnych definiujemy jako najmniejszą klasę funkcji całkowitych $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots$, zawierającą bazowe funkcje rekurencyjne i zamkniętą na składanie i rekursję prostą. Udowodnić, że istnieje całkowita funkcja rekurencyjna, która nie jest funkcją pierwotnie rekurencyjną (wsk: zastosować metodę przekątniową).
3. Niech K oznacza zbiór kodów maszyn Turinga. Rozstrzygnąć, które z podanych zbiorów są rekurencyjnie przeliczalne.
(a) $L_1 = \{c \in K : L(M(c)) \text{ ma przynajmniej dwa słowa}\}$.
(b) $L_2 = \{c \in K : L(M(c)) \text{ ma co najwyżej dwa słowa}\}$.
(c) Zbiór tych równań diofantycznych, które mają rozwiązanie w liczbach całkowitych.
(d) Zbiór tych równań diofantycznych, które nie mają rozwiązania w liczbach całkowitych.
(wsk. do (c), (d): Matjasevic udowodnił, że zbiory z punktów (c), (d) nie są rekurencyjne, tzn. nie istnieje algorytm rozstrzygający, czy dane równanie diofantyczne ma rozwiązanie. Wykorzystać ten fakt w dowodzie.)
4. Załóżmy, że maszyna Turinga M zawsze się zatrzymuje. Niech $f(n) =$ maksymalna liczba kroków działania maszyny M na wejściu długości n . Udowodnić, że funkcja f jest rekurencyjna.
5. Udowodnić, że dla każdej funkcji wielomianowej $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ istnieje funkcja wielomianowa rosnąca $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ większa od w .
6. Załóżmy, że L i L' są językami nad alfabetem Σ oraz $L \triangle L'$ jest skończony. Udowodnić, że
(a) L jest rekurencyjny $\iff L'$ jest rekurencyjny.
(b) To samo, co w (a), tylko dla zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych.
7. Udowodnić, że każde wyrażenie boolowskie jest równoważne wyrażeniu w koniunkcyjnej postaci normalnej.
8. Załóżmy, że $A \in P$ oraz $B = L(M^A)$ dla pewnej maszyny z wyrocznią M^A działającej w czasie wielomianowym. Udowodnić, że $B \in P$.
9. Załóżmy, że L jest NP -zupełny, $L' \in NP$ oraz $L \leq_W L'$. Udowodnić, że L' też jest NP -zupełny.
10. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest skończonym grafem nieskierowanym. Napisać wyrażenie boolowskie w_G , które jest spełnialne wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G jest ścieżka Hamiltona.

Na ocenę dostateczną: Znajomość podstawowych pojęć, twierdzeń. Umiejętność konstruowania automatów i maszyn Turinga rozwiązujących różne problemy. Umiejętność konstruowania gramatyk bezkontekstowych i wyrażeń regularnych.

Na oceny wyższe: dodatkowo znajomość dowodów i umiejętność samodzielnego przeprowadzania mniej (ocena dobra) lub bardziej (ocena bardzo dobra) skomplikowanych rozumowań.

Materiał obowiązujący na egzaminie:

Automaty skończone: deterministyczne i niedeterministyczne (ich równoważność). Równoważność automatów skończonych z wyrażeniami regularnymi. Twierdzenie Myhill-Nerode'a (bez dowodu). Własności języków regularnych. Lemat o pompowaniu (z dowodem!).

Gramatyki bezkontekstowe i automaty ze stosem. Wyprowadzenia, drzewa wyprowadzeń (drzewa rozkładu). Dwa rodzaje akceptowania (przy pustym stosie i przy stanie końcowym). Równoważność obu ujęć i gramatyk bezkontekstowych (bez dowodu). Lemat o pompowaniu (z dowodem), lemat Ogdena (bez dowodu).

Maszyny Turinga: różne rodzaje, ich równoważność. Funkcje obliczalne przez maszyny Turinga. Funkcje rekurencyjne: definicja, równoważność z funkcjami obliczalnymi przez maszyny Turinga. Teza Churcha. Zbiory rekurencyjne i rekurencyjnie przeliczalne: definicja, charakteryzacja przez maszyny Turinga. Rozumowania przekątniowe, uniwersalna maszyna Turinga. Przykłady języków nie rekurencyjnie przeliczalnych oraz rekurencyjnie przeliczalnych, lecz nierekurencyjnych. Twierdzenie Rice'a. Własności zbiorów rekurencyjnych i rekurencyjnie przeliczalnych. Maszyny z wyrocznią. Relatywna rekurencyjność, $\leq_T$.

Elementy teorii złożoności obliczeniowej: złożoność czasowa i pamięciowa, deterministyczna i niedeterministyczna. Twierdzenie o hierarchiach. Klasy P i NP . Przykłady problemów z klasy NP , świadomość, że $NPTIME \subseteq EXPTIME$ (tzn. języki rozpoznawane przez DTM w czasie eksponencjalnym). Problem $P \neq NP$. Problemy NP -trudne i NP -zupełne. Problem SAT: idea dowodu, że jest NP -zupełny. Przykłady innych problemów NP -zupełnych.

Umiejętność rozwiązywania zadań z list.