Algebra 1A, lista 3.

Konwersatorium 24.10.2016, ćwiczenia 25.10.2016.

0S. Materiał teoretyczny : rząd elementu grupy, podgrupa generowana przez podzbiór/element grupy. Grupa cykliczna: definicja, wyliczenie wszystkich. Mnożenie permutacji w postaci dwuwierszowej, w postaci iloczynu cykli. Permutacja odwrotna. Rozkład permutacji na cykle rozłączne. Inwersja w permutacji, transpozycja. Permutacje parzyste/nieparzyste. Znak permutacji.

1K. Dana jest grupa G.

(a) Załóżmy, że $a \in G$ i $aa = a$. Udowodnić, że $a = e$.

(b) Załóżmy, że $a, b \in G$ i $ab = e$. Dowieść, że wtedy $ba = e$ (więc $b = a^{-1}$).

2S. Niech $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Sprawdzić, że zbiór $k\mathbb{Z} = \{kn : n \in \mathbb{Z}\}$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ oraz, że jest to grupa izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Załóżmy, że H jest nietrywialną podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$.

(a) Udowodnić, że istnieje liczba dodatnia, która należy do H.

(b) Niech k będzie najmniejszą liczbą dodatnią należącą do H. Udowodnić, że $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Udowodnić, że $k\mathbb{Z} = H$.

Wywnioskować stąd, że każda podgrupa grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jest postaci $k\mathbb{Z}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

4. Załóżmy, że grupa G jest skończona. Udowodnić, że G jest cykliczna $\iff$ istnieje $a \in G$ taki, że $ord(a) = |G|$.

5. Udowodnić, że każda podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

6S. W każdej z grup z zad. 2.6 (tzn. zadanie 6 z listy 2) wskazać przynajmniej jedną nietrywialną podgrupę właściwą lub uzasadnić, że takiej podgrupy nie ma.

7K. Które z grup z zad. 2.6 sa cykliczne ?

8S Rozłożyć permutację $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ na iloczyn cykli rozłącznych. Jaki jest znak tej permutacji ? Zapisać permutację σ^{-1} w postaci tabularycznej i jako iloczyn cykli rozłącznych.

9. Wyznaczyć rzędy następujących permutacji z S_{10}:

(1)S $(1, 2)(4, 5, 6, 7)$

(2)S $(1, 2, 3)(4, 5, 6, 7)$

(3)K $\alpha \circ \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in S_{20}$, α to cykl długości k, zaś β to cykl długości l oraz cykle te są rozłączne. Wsk: $ord(\alpha\beta)$ to $NWW(k, l)$ (najmniejsza wspólna wielokrotność rzędów α i β). To trzeba udowodnić.

10. Doskonałe tasowanie zbioru $2n$ kart do gry to permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Jaka jest najmniejsza liczba doskonałych tasowań 52 kart, po której karty są w wyjściowym układzie ? Jaka jest ta liczba dla 50 kart ?

11. Dla wielomianu $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ i permutacji $\sigma \in S_4$ definiujemy wielomian $W^\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ wzorem:

$$W^\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = W(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$$

Niech $G_W = \{\sigma \in S_4 : W = W^\sigma\}$.

Wyznaczyć G_W dla następujących wielomianów:

(a) $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$

(b) $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$

(c) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$.

G_W jest zawsze pewną podgrupą S_4.

12*. Piętnastka to następująca układanka: w ramce z miejscami na 16 kostek umieszczone jest 15 kostek z liczbami od 1 do 15, jedno miejsce pozostaje wolne. W pojedynczym ruchu można przesuwać poziomo lub pionowo kostkę na wolne miejsce, z miejsca sąsiedniego. Udowodnić, że w ten sposób z układu:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

nie można w żadnej liczbie ruchów przejść do układu:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15