

Zadan (lub ich podpunktów) oznaczonych minusem nie wolno oddawać jako zadanie domowe. Z każdego zadania jako zadanie domowe wolno oddać co najwyżej jeden podpunkt.

1. - Niech $\Sigma = \{0, 1\}$. Znaleźć jednotaśmowe maszyny Turinga rozpoznające następujące języki $L \subseteq \Sigma^*$:
 (a) $L = \{01, 0101, 010101, \dots\}$, (b) $L = \{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$ (tu $\sigma^n = \sigma\sigma \dots \sigma$ (n razy))
2. (a) Dowieść, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{N}$ są rekurencyjne, to $\mathbb{N} \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$ też (tzn. zbiory rekurencyjne tworzą ciało podzbiorów $\mathbb{N}$).
 (b) Dowieść, że jeśli $f(x, y)$ jest rekurencyjna, to $g(x) = \sum_{y \leq x} f(x, y)$ jest rekurencyjna.
 (c) Dowieść, że jeśli funkcja (całkowita) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest rosnąca i $Rng(f)$ jest zbiorem rekurencyjnym, to f jest rekurencyjna.
 (d) Dowieść, że $X \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjny $\iff X$ jest obrazem pewnej rosnącej funkcji rekurencyjnej.
3. (a) Dowieść, że zbiór wartości i dziedzina funkcji rekurencyjnej $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ są rekurencyjnie przeliczalne.
 (b) Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjnie przeliczalny, to istnieje funkcja rekurencyjna $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że A jest jej dziedziną.
 (c) Załóżmy, że $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $A = f[\mathbb{N}]$, $B = g[\mathbb{N}]$ oraz $A \cap B \neq \emptyset$. Używając f, g , bazowych funkcji rekurencyjnych oraz operacji składania, rekursji prostej i minimum zdefiniować funkcję $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ której zbiór wartości to $A \cap B$.
4. (a) Dowieść, że zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjnie przeliczalny $\iff A$ jest rzutem pewnego zbioru rekurencyjnego $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 (b) Dowieść, że rzut zbioru rekurencyjnie przeliczalnego $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na pierwszą oś jest rekurencyjnie przeliczalny.
 (c) Załóżmy, że $A \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjnie przeliczalny i nieskończony. Udowodnić, że istnieje rekurencyjnie przeliczalny zbiór $B \subseteq A$ taki, że $A \setminus B$ nie jest rekurencyjnie przeliczalny.
5. $A \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy spektrum, gdy istnieje zdanie σ w pewnym języku L t.ż. $A = \{\|M\| : M \models \sigma \text{ i } M \text{ skończony}\}$. Dowieść, że jeśli A jest spektrum, to A jest rekurencyjny. (Uwaga: implikacja odwrotna to otwarty problem Fagina, ok. 1970).
6. Dowieść, że $A \subseteq \mathbb{N}$ jest rekurencyjnie przeliczalny $\iff$ istnieje maszyna Turinga M t.ż. dla danej wejściowej $x \in \mathbb{N}$: M zatrzymuje się $\iff x \in A$.
7. Dowieść w PA , że
 (a) $x + y = y + x$; (b) $x \cdot y = y \cdot x$; (c) $(x + y) + z = x + (y + z)$ itd.

8. Napisać w języku $L = \{+, \cdot, <\} \cup \{\underline{n} : n \in N\}$ następujące formuły o liczbach naturalnych:
- (a)- x jest liczbą pierwszą;
 - (b)- x jest potęgą 2;
 - (c)- x jest iloczynem parami różnych liczb pierwszych;
 - (d) x jest potęgą 10;
 - (e) x jest liczbą nieizomorficznych grafów o y wierzchołkach;
 - (f) x jest liczbą różnych baz w y -wymiarowej przestrzeni liniowej nad Z_2 .
9. Funkcje pierwotnie rekurencyjne $Prec$ powstają z podstawowych przez stosowanie superpozycji i definiowanie przez rekursję prostą. Dowieść, że istnieje funkcja rekurencyjna całkowita, kto/ra nie jest pierwotnie rekurencyjna. (wsk: znaleźć funkcję rekurencyjną $f : N \times N \rightarrow N$ całkowitą, uniwersalną dla $Prec$, tzn. taką, że $\forall n f(n, \cdot) \in Prec$ i $\forall g : N \rightarrow N, g \in Prec \Rightarrow \exists n f(n, \cdot) = g(\cdot)$)