Wstęp A, lista 10.

Konwersatorium 25.05.2015 (2 godziny), ćwiczenia: 29.05.2015.

0T. Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Równoliczność prostej i płaszczyzny. Zbiory skończone: definicja. Zbiory przeliczalne: definicja, charakteryzacja, własności, przykłady ($\mathbb{Q}$). Twierdzenie Cantora: Zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny. Działania na liczbach kardynalnych: dodawanie, mnożenie, potęgowanie. $|\mathcal{P}(X)| = 2^|X|$. Funkcja charakterystyczna zbioru.

1K. (a) Znaleźć dwa nieskończone rozłączne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$.
(b) Znaleźć nieskończenie wiele nieskończonych parami rozłącznych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.
(c) Udowodnić, że każda rodzina $\mathcal{A}$ rozłącznych niepustych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest przeliczalna. (wsk: ustawić zbiory z rodziny $\mathcal{A}$ w ciąg).

2K. Dla $r \in \mathbb{R}$ definiujemy zbiór $A_r = \mathbb{Q} \cap (-\infty, r)$. Udowodnić, że dla $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, $A_{r_1} \neq A_{r_2}$.

3K. Dane są zbiory A, B, C. Określić bijekcje między zbiorami:
a) $A \times B$ i $B \times A$,
b) $\{2,3\}^A$ i $\{5,7\}^A$,
c) $A^{\{2,3\}}$ i $A \times A$
d) $A^{B\times C}$ (tzn. zbiorem funkcji : $B \times C \to A$) i $(A^B)^C$
(tzn. zbiorem funkcji : $C \to A^B$).

4K. Udowodnić, że:
(a) $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$
(b) $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} \cdot \aleph_0$.

5K. Niech X będzie przestrzenią. Dla zbioru $A \subseteq X$ definiujemy funkcję charakterystyczną $\chi_A(x) : X \to \{0,1\}$ wzorem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

Udowodnić, że dla wszystkich zbiorów $A, B \subseteq X$:
$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$, $\chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x)) = 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x))$,
$\chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x)\chi_B(x)$.

6. Uzasadnić, że następujące zbiory sa przeliczalne:
(a) Dowolny zbiór rozłącznych przedziałów na prostej długości > 1 każdy.
(b) Zbiór liczb wymiernych postaci m/n, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$ i $0 < |n| < 5$.
(c) Zbiór wielomianów o współczynnikach całkowitych (por. wniosek 11.9 z wykładu).
(d) Zbiór liczb algebraicznych.
(e) Dowolny zbiór rozłącznych przedziałów na prostej (wsk: skorzystać z faktu, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, por. też zadanie 1(c)).
(f) Dowolny zbiór rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie.
(g)* Dla dowolnej funkcji rosnącej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zbiór punktów nieciągłości funkcji f.

7. (a) Udowodnić, że zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jest nieprzeliczalny. (wsk: nie wprost, skorzystać z faktów z wykładu.).
(b) Udowodnić, że zbiór przestępnych liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.
(c)* Udowodnić, że zbiory z punktów (a) i (b) mają moc continuum (tzn. są równoliczne z $\mathbb{R}$).

8. Korzystając z tego, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, udowodnić, że $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

9. Korzystając z twierdzenia Cantora-Bernsteina udowodnić, że następujące zbiory A i B są równoliczne:
(a) $A = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
(b) A =zbiór punktów dowolnego kwadratu na płaszczyźnie, B =zbiór punktów dowolnego trójkąta na płaszczyźnie.

10. Udowodnić, że
(a) każda klasa abstrakcji relacji z zadania 6(b) z listy 7 jest równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych oraz że
(b) zbiór ilorazowy tej relacji równoważności też jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.
Są to więc zbiory mocy continuum.

11. Na zbiorze X wszystkich ciągów zerojedynkowych, (tzn. ciągów (a_n), gdzie $a_n \in \{0, 1\}$) określamy relację $=^*$ wzorem:

$$(a_n) =^* (b_n) \Leftrightarrow \text{począwszy od pewnego miejsca ciągi } (a_n) \text{ i } (b_n) \text{ są równe.}$$

(a) Zapisać symbolicznie definicję relacji $=^*$.
(b) Udowodnić, że $=^*$ jest relacją równoważności. W dowodzie nie używać symboli kwantyfikatorów ani spójników logicznych.
(c) Udowodnić, że każda klasa abstrakcji relacji $=^*$ jest przeliczalna nieskończona.
(d)* Udowodnić, że klas abtrakcji jest nieprzeliczalnie wiele.