Wstęp A, lista 11.

Konwersatorium 8.06.2015, 15.06.2015, Ćwiczenia 12.06.2015.

0T. Porównywanie liczb kardynalnych: definicja $\leq$, własności. $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Twierdzenie Cantora: $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$. Aksjomat wyboru. Lemat Kuratowskiego-Zorna. Liniowość (spójność) uporządkowania liczb kardynalnych. Hipoteza Continuum. Indukcja matematyczna jako metoda dowodzenia twierdzeń. Zasada indukcji matematycznej. Schemat dowodu przez indukcję: teza indukcyjna, pierwszy i drugi krok indukcji, założenie indukcyjne w drugim kroku indukcji. Formy równoważne zasadzie indukcji matematycznej: zasada minimum, zasada indukcji porządkowej. Definicje rekurencyjne. Dobry porządek. Zasada indukcji pozaskończonej. Każdy zbiór można dobrze uporządkować. Izomorfizm porządkowy. Liczby porządkowe, liniowe uporządkowanie liczb porządkowych. Dodawanie i mnożenie liczb porządkowych (nieprzemienność, przykłady). Alefy.

1S. (a) Korzystając wprost z rekurencyjnej definicji dodawania liczb naturalnych obliczyć $3+4,\ 5+3,\ 4+3,\ 3+5$.
(b) Korzystając wprost z rekurencyjnej definicji mnożenia liczb naturalnych obliczyć $2\cdot 3, 5\cdot 3,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 5$ (uwaga: w tym punkcie można dodawanie wykonywać w jednym kroku).

2K. Dany jest zbiór skończony X. Udowodnić przez indukcję, że jeśli X ma n elementów, to: zbiór $X \times X$ ma n^2 elementów. Sformułować tezę indukcyjną i oba kroki indukcyjne. W drugim kroku wskazać dowodzoną tezę i założenie indukcyjne.

3K. Udowodnić przez indukcję, że jeśli ciąg (a_n) liczb naturalnych jest rosnący, to $a_n \geq n$.

(a) Napisać tezę indukcyjną, słowami i symbolicznie.

(b) Sformułować i udowodnić pierwszy krok indukcyjny.

(c) Sformułować drugi krok indukcyjny: wskazać tezę do udowodnienia i założenie indukcyjne. Udowodnić.

4K. Dowieść, że każdy n-kąt wypukły na płaszczyźnie można podzielić na $n-2$ trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi (* Czy założenie wypukłości można pominąć ?).

5. Rozstrzygnąć, czy prawdziwe są następujące warianty zasady indukcji matematycznej.

(a) Jeśli zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby całkowitej k, $\varphi(k)$ implikuje $\varphi(k+7)$ i $\varphi(k-31)$, to dla każdej liczby całkowitej k zachodzi $\varphi(k)$.

(b) Załóżmy, że zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby naturalnej k, jeśli k jest nieparzyste, to $\varphi(k)$ implikuje $\varphi((k+1)/2^l)$ dla wszystkich $l > 0$ takich, że $2^l|(k+1)$, natomiast gdy k jest parzyste, to $\varphi(k)$ implikuje $\varphi(2k+3)$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej k zachodzi $\varphi(k)$.

(c) Jeśli zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby naturalnej n, $\varphi(n)$ implikuje $\varphi(2n)$ i $\varphi(2n+1)$, to wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $\varphi(n)$.

(d) Jeśli istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których $\varphi(n)$ zachodzi, oraz dla każdej $n > 0$, jeśli $\varphi(n)$ to $\varphi(n-1)$, to wtedy $\varphi(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(e) Jeśli zachodzi $\varphi(0), \varphi(1)$ i dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby pierwszej p, jeśli $\varphi(n)$ to $\varphi(n \cdot p)$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}, \varphi(n)$.

W każdym podpunkcie napisać dane zdanie używając symboliki logicznej.

6. Ciąg Fibonacciego definiujemy rekurencyjnie: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Udowodnić przez indukcję, że

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Zadania różne (niektóre są trudne)

1. Wskazać podzbiory zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, a następnie podzbiory zbioru $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, o typach porządkowych:

(a) ω,

(b) $\omega + 1$

(c) $\omega + \omega$,

(d) $\omega \cdot \omega$.

2*. Znaleźć nieprzeliczalną rodzinę nieprzeliczalnych rozłącznych podzbiorów $\mathbb{R}$.

3*. Mówimy, że zbiory A, B są prawie rozłączne, gdy $A \cap B$ jest skończony. Znaleźć nieprzeliczalną rodzinę prawie rozłącznych nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.

4*. Trypodem nazywamy sumę dowolnych trzech różnych odcinków o jednym wspólnym końcu, który jest też jedynym wspólnym punktem każdych dwóch spośród tych odcinków. Udowodnić, że każdy zbiór rozłącznych trypodów na płaszczyźnie jest przeliczalny.

5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Co to znaczy, że w punkcie x funkcja f ma lokalne maksimum ? (napisać formalną definicję, używając symboliki logicznej)

(b)* Udowodnić, że zbiór punktów x, w których f ma lokalne maksimum, jest przeliczalny.

6*. Ile co najwyżej zbiorów można otrzymać z danych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ stosując operacje $\cup, \cap$? (wsk: a może zastosować indukcję ?)

7*. Udowodnić, że każdy przeliczalny porządek liniowy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem zbioru liczb wymiernych (ze zwykłym porządkiem).

8*. (a) Udowodnić, że w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (z porządkiem leksykograficznym) nie istnieje gęsty podzbiór przeliczalny A (mówimy, że podzbiór A porządku liniowego X jest gęsty, jeśli między każdymi dwoma elementami zbioru X leży jakiś element zbioru A).

(b) W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem leksykograficznym wskazać podzbiór ograniczony, z kresem górnym ale bez kresu dolnego.

(c) Udowodnić, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem leksykograficznym nie jest izomorficzny ze zbiorem $\mathbb{R}$ ze zwykłym porządkiem liniowym.

9. Dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ definiujemy formuły zdaniowe $\alpha_n(p), \beta_n(p)$: $\alpha_0 = \beta_0 = p$, $\alpha_{n+1} = (p \Rightarrow \alpha_n)$, $\beta_{n+1} = (\beta_n \Rightarrow p)$ (jak widać definicja jest rekurencyjna). Dla których n formuły α_n, β_n są tautologiami rachunku zdań ? (wsk: zastosować indukcję)

10. Załóżmy, że $f : X \to Y$.
(a) Udowodnić, że f jest $1-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \to X$ taka, że $g \circ f = id_X$.
(b) Udowodnić, że funkcja f jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \to X$ taka, że $f \circ g = id_Y$.

11*. Znaleźć zbiór $A \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że każda liczba całkowita może być przedstawiona jako suma dwóch liczb ze zbioru A (niekoniecznie różnych) na jeden sposób (z dokładnością do kolejności składników).