

Konwersatorium 9.06.2014. Ćwiczenia 13.06.2013.

0T. Indukcja matematyczna jako metoda dowodzenia twierdzeń. Zasada indukcji matematycznej. Schemat dowodu przez indukcję: teza indukcyjna, pierwszy i drugi krok indukcji, założenie indukcyjne w drugim kroku indukcji. Formy równoważne zasadzie indukcji matematycznej: zasada minimum, zasada indukcji porządkowej. Definicje rekurencyjne. Dobry porządek. Zasada indukcji pozaskończonych. Każdy zbiór można dobrze uporządkować. Izomorfizm porządkowy. Liczby porządkowe, liniowe uporządkowanie liczb porządkowych. Dodawanie i mnożenie liczb porządkowych (nieprzemienność, przykłady). Alefy.

1. (a) Korzystając wprost z rekurencyjnej definicji dodawania liczb naturalnych obliczyć $3 + 4$, $5 + 3$, $4 + 3$, $3 + 5$.

(b) Korzystając wprost z rekurencyjnej definicji mnożenia liczb naturalnych obliczyć $2 \cdot 3$, $5 \cdot 3$, $3 \cdot 2$, $3 \cdot 5$ (uwaga: w tym punkcie można dodawanie wykonywać w jednym kroku).

2K. Dany jest zbiór skończony X . Udowodnić przez indukcję, że jeśli X ma n elementów, to: zbiór $X \times X$ ma n^2 elementów. Sformułować tezę indukcyjną i oba kroki indukcyjne. W drugim kroku wskazać dowodzoną tezę i założenie indukcyjne.

3K. Udowodnić przez indukcję, że jeśli ciąg (a_n) liczb naturalnych jest rosnący, to $a_n \geq n$.

(a) Napisać tezę indukcyjną, słowami i symbolicznie.

(b) Sformułować i udowodnić pierwszy krok indukcyjny.

(c) Sformułować drugi krok indukcyjny: wskazać tezę do udowodnienia i założenie indukcyjne. Udowodnić.

4K. Dowieść, że każdy n -kąąt wypukły na płaszczyźnie można podzielić na $n - 2$ trójkąty nieprzecinającymi się przekątnymi (* Czy założenie wypukłości można pominąć?).

5. Rozstrzygnąć, czy prawdziwe są następujące warianty zasady indukcji matematycznej.

(a) Jeśli zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby całkowitej k , $\varphi(k)$ implikuje $\varphi(k + 7)$ i $\varphi(k - 31)$, to dla każdej liczby całkowitej k zachodzi $\varphi(k)$.

(b) Załóżmy, że zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby naturalnej k , jeśli k jest nieparzyste, to $\varphi(k)$ implikuje $\varphi((k + 1)/2^l)$ dla wszystkich $l > 0$ takich, że $2^l | (k + 1)$, natomiast gdy k jest parzyste, to $\varphi(k)$ implikuje $\varphi(2k + 3)$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej k zachodzi $\varphi(k)$.

(c) Jeśli zachodzi $\varphi(0)$ i dla każdej liczby naturalnej n , $\varphi(n)$ implikuje $\varphi(2n)$ i $\varphi(2n + 1)$, to wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $\varphi(n)$.

(d) Jeśli istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n , dla których $\varphi(n)$ zachodzi, oraz dla każdej $n > 0$, jeśli $\varphi(n)$ to $\varphi(n - 1)$, to wtedy $\varphi(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(e) Jeśli zachodzi $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ i dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby pierwszej p , jeśli $\varphi(n)$ to $\varphi(n \cdot p)$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$.

W każdym podpunkcie napisać dane zdanie używając symboliki logicznej.

6. Ciąg Fibonacciego definiujemy rekurencyjnie: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Udowodnić przez indukcję, że

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Zadania różne (niektóre są trudne)

1. Wskazać podzbiory zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} , a następnie podzbiory zbioru $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$, o typach porządkowych:

- (a) ω ,
- (b) $\omega + 1$
- (c) $\omega + \omega$,
- (d) $\omega \cdot \omega$.

2*. Znaleźć nieprzeliczalną rodzinę nieprzeliczalnych rozłącznych podzbiorów \mathbb{R} .

3*. Mówimy, że zbiory A, B są prawie rozłączne, gdy $A \cap B$ jest skończony. Znaleźć nieprzeliczalną rodzinę prawie rozłącznych nieskończonych podzbiorów \mathbb{N} .

4*. Trypodem nazywamy sumę dowolnych trzech różnych odcinków o jednym wspólnym końcu, który jest też jedynym wspólnym punktem każdych dwóch spośród tych odcinków. Udowodnić, że każdy zbiór rozłącznych trypodów na płaszczyźnie jest przeliczalny.

5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Co to znaczy, że w punkcie x funkcja f ma lokalne maksimum? (napisać formalną definicję, używając symboliki logicznej)

(b)* Udowodnić, że zbiór punktów x , w których f ma lokalne maksimum, jest przeliczalny.

6*. Ile co najwyżej zbiorów można otrzymać z danych zbiorów A_1, \dots, A_n stosując operacje \cup, \cap ? (wsk: a może zastosować indukcję?)

7*. Udowodnić, że każdy przeliczalny porządek liniowy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem zbioru liczb wymiernych (ze zwykłym porządkiem).

8*. (a) Udowodnić, że w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (z porządkiem leksykograficznym) nie istnieje gęsty podzbiór przeliczalny A (mówimy, że podzbiór A porządku liniowego X jest gęsty, jeśli między każdymi dwoma elementami zbioru X leży jakiś element zbioru A).

(b) W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem leksykograficznym wskazać podzbiór ograniczony, z kresem górnym ale bez kresu dolnego.

(c) Udowodnić, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z porządkiem leksykograficznym nie jest izomorficzny ze zbiorem \mathbb{R} ze zwykłym porządkiem liniowym.

9. Dla $n = 0, 1, 2, \dots$ definiujemy formuły zdaniowe $\alpha_n(p), \beta_n(p)$: $\alpha_0 = \beta_0 = p$, $\alpha_{n+1} = (p \Rightarrow \alpha_n)$, $\beta_{n+1} = (\beta_n \Rightarrow p)$ (jak widać definicja jest rekurencyjna). Dla których n formuły α_n, β_n są tautologiami rachunku zdań? (wsk: zastosować indukcję)

10. Załóżmy, że $f : X \rightarrow Y$.

(a) Udowodnić, że f jest 1-1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \rightarrow X$

taka, że $g \circ f = id_X$.

(b) Udowodnić, że funkcja f jest “na” wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \rightarrow X$ taka, że $f \circ g = id_Y$.

11*. Znaleźć zbiór $A \subseteq \mathbb{Z}$ taki, że każda liczba całkowita może być przedstawiona jako suma dwóch liczb ze zbioru A (niekoniecznie różnych) na jeden sposób (z dokładnością do kolejności składników).