Wstęp A, lista 1.

Konwersatorium 2.03.2015 (2 godziny), ćwiczenia 6.03.2014.

Literą T oznaczony jest materiał teoretyczny, zaś literą K zadania omawiane na konwersatorium. Na kartkówce obowiązują wszystkie zadania z listy (w tym material teoretyczny).

0T. Spójniki logiczne: definicje, tabelki wartości, interpretacje w języku naturalnym. W szczególności: warunek konieczny, dostateczny, implikacja odwrotna. Pojęcie wynikania. Schemat twierdzenia matematycznego. Schematy dowodów wprost i nie wprost. Definicja podzielności liczb całkowitych. Formuły zdaniowe (analogia do wyrażeń algebraicznych). Tabelka wartości logicznych formuły zdaniowej. Tautologie rachunku zdań: definicja, charakteryzacja przy pomocy tabelki wartości logicznych. Przykłady tautologii: prawa: wyłączonego środka, sprzeczności, podwójnej negacji, przechodniości implikacji, transpozycji (kontrapozycji), prawa de Morgana, Claviusa, Dunsa Szkota. Negacja ipmlikacji. Równoważność jako koniunkcja dwóch implikacji.

1K. Oznaczając symbolem p zdanie "Ala je", zaś symbolem q zdanie "As wyje" i używając spójników logicznych i nawiasów zapisać jako formuły rachunku zdań następujące zdania:
(a) Ala je pod warunkiem, że As wyje.
(b) As nie wyje, zaś Ala nie je.
(c) Ani Ala nie je, ani As nie wyje.
(d) As wyje, o ile Ala nie je.
(e) As wyje dokładnie wtedy, gdy Ala je.
(f) Bądź Ala je, bądź As wyje.
(g) Albo As wyje, albo Ala nie je.
(h) Ala je tylko wtedy, gdy As wyje.
(i) Ala je dokładnie wtedy, gdy As wyje.
(j) Ala je, a As wyje.
(k) Ala je, chyba że As wyje. (l) Ala je pomimo tego, że As wyje. (m) Ala je, no i As wyje.

Wsk: w razie wątpliwości można napisać tabelkę wartości logicznych zdania w zależności od wartości logicznych zdań składowych p i q. Niektóre formuły się powtarzają. Znaczy to, że pod względem logicznym odpowiednie zdania są równoważne. Czy mają jednak to samo znaczenie potoczne ?

2K. Wskazać błąd w dowodzie następującego (fałszywego) twierdzenia:
Jeśli liczba naturalna n jest sumą dwóch liczb naturalnych podzielnych przez 3, to n jest podzielna przez 6.

Dowód. Załóżmy, że $n = m_1 + m_2$ dla pewnych liczb naturalnych m_1 i m_2 podzielnych przez 3. Na mocy definicji znaczy to, że $m_1 = 3 \cdot k$ dla pewnej liczby naturalnej k oraz $m_2 = 3 \cdot k$ dla pewnej liczby naturalnej k. Skoro tak, to

$$n = m_1 + m_2 = 3 \cdot k + 3 \cdot k = 6 \cdot k,$$

więc n jest podzielna przez 6.

3. Udowodnić wprost następujące twierdzenia.
(a) Jeśli liczba naturalna n jest podzielna przez 6, to n jest podzielna przez 3.
(b) Jeśli liczba naturalna n jest kwadratem jakiejś liczby naturalnej podzielnej przez

2, to n jest podzielna przez 4.
(c) Jeśli liczba całkowita n jest różnicą dwóch liczb naturalnych podzielnych przez 3, to n jest podzielna przez 3.
Dowody zapisac pełnymi zdaniami, wzorując się na dowodzie z wykładu i odwołując się do definicji.

4. Udowodnić nie wprost następujące twierdzenia.
(a) Jeśli liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, to n nie jest podzielna przez 6.
(b) Jeśli x jest dodatnią liczbą wymierną, to $x^2 \neq 3$.
Oznaczmy przez p zdanie "n jest podzielna przez 6, zaś przez q zdanie "n jest podzielna przez 3. Zapisać zdania 3(a) i 4(a) przy pomocy symboli p, q i spójników logicznych. Jaki jest związek między uzyskanymi formułami zdaniowymi ?
W (b) wzorować się na dowodzie z wykładu.

5. Czy dla wszystkich liczb naturalnych $n = 0, 1, 2, \ldots$ prawdziwe są następujace zdania ?
(a) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to o ile n jest liczbą złożoną, to $n = 4$.
(b) n jest podzielne przez 2 pod warunkiem, że n jest podzielne przez 5 i $5 < n < 15$.
(c) n jest podzielne przez 3 dokładnie wtedy, gdy n jest podzielne przez 7.
(d) To, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n dzieli 30.
(e) To, że n dzieli 30, jest warunkiem dostatecznym do tego, że n jest liczbą pierwszą mniejszą od 6.
Rozważyć też warianty zdań (d) i (e), gdzie "dostatecznym" jest zastąpione przez "koniecznym".
Wsk: w razie wątpliwości zapisać te zdania przy pomocy formalnych spójników logicznych.

6.K C oznacza czworokąt na płaszczyźnie. Rozważamy zdanie:

> $(*)$ Gdy C jest rombem lub nie jest trapezem, to jeśli C jest trapezem, to jest kwadratem.

(a) Napisać $(*)$ jako formułę rachunku zdań, stosując oznaczenia:
p: C jest trapezem, q: C jest kwadratem, r: C jest rombem.
(b) Wiemy, że C nie jest rombem.
(c) Wiemy, że C jest trapezem.
(d) Wiemy, że C nie jest prostokątem.
W każdym z przypadków (b), (c), (d) rozstrzygnąć, czy w danej sytuacji zdanie $(*)$ jest zawsze prawdziwe, zawsze fałszywe czy też może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe (dla różnych czworokątów C).

7. Sprawdzić, że następujące formuły rachunku zdań są tautologiami (metodą 0-1 lub nie wprost).
(a) $p \Rightarrow p$, (b) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
(c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$,
(d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (prawo transpozycji),
(e) $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (prawo Claviusa),
(f) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (prawo Dunsa Szkota),
(g) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,
(h) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$.

(i) $p \wedge q \Rightarrow p$, (j) $p \Rightarrow p \vee q$.

8. Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami. Uwaga: najpierw spróbować zrozumieć dany schemat i zgadnąć bez sprawdzania.
(a) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$,
(b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q)$,
(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r)$,
(d) $p \Rightarrow (\neg p \vee q)$,
(e) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
(f) $p \Rightarrow (\neg q \wedge q \Rightarrow r)$.