Wstęp A, lista 2.
Konwersatorium 9.03.2015, ćwiczenia 13.03.2015.

Zadania oznaczone literą K będą omawiane na konwersatorium.

1. T. Formuły równoważne: definicja, charakteryzacja przy pomocy tabelki wartości logicznych. Tautologie opisujące własności koniunkcji i alternatywy: przemienność, łącznośc i wzajemna rozdzielność $\wedge$ i $\vee$. Prawa pochłaniania (uwaga: nie ma ich w skrypcie, były na wykładzie). Postać alternatywno-koniunkcyjna i koniunkcyjno-alternatywna. Każda formuła zdaniowa jest równoważna formule w postaci k-a i a-k. Każda formuła zdaniowa jest równoważna formule używającej spośród spójników zdaniowych wyłącznie negacji $\neg$ i wybranego spójnika spośród $\wedge, \vee, \Rightarrow$. Rozwiązywanie równań i nierówności: metoda przekształceń równoważnych i metoda implikacji.

2. K. O liczbie naturalnej n wiadomo, ze:
(a) Jeśli n dzieli się przez 3 lub przez 4, to dzieli się przez 12. ORAZ
(b) Jeśli n dzieli się przez 3, to nie dzieli się przez 2.
Czy stąd wynika, że n nie dzieli się przez 3 ?

3. K. O liczbie rzeczywistej x wiadomo, że jeśli $x \leq 5$, to $x > 3$. Czy stąd wynika, że $x > 3$?

4. K. O liczbie rzeczywistej x wiadomo, że:
(a) Jeśli $x > 0$, to $x > 5$ o ile $x > 3$. ORAZ
(b) Jeśli $x \leq 5$, to $x > 0$.
Czy stąd wynika, że $x > 3$?

   W przyp. odp. "tak" w zad. 1-3, podać uzasadnienie (czyli prosty dowód). Jeśli "nie", podać kontrprzykład na wynikanie.

5. (a) Jak przy pomocy tabelki formuły $\alpha(p, q)$ rozpoznać, czy formuła $p \vee q \Rightarrow \alpha(p, q)$ jest tautologią ?
(b) Znaleźć wszystkie (z dokładnością do równoważności) formuły $\alpha(p, q)$ takie, że $p \wedge q \Rightarrow \alpha(p, q)$ jest tautologią.

   (uwaga: na konwersatorium przedyskutujemy, co to znaczy "z dokładnością do równoważności")

6. (a) Zdefiniować alternatywę $p \vee q$ i komiunkcję $p \wedge q$ przy pomocy $\neg$ i $\Rightarrow$.
(b) Korzystając z (a) przeformułować zdania: *Lubię ciastka i lody. Na wakacje pojadę nad morze lub w góry.*, spośród spójników używając tylko negacji i implikacji.
(c)* Udowodnić, że za pomocą $\wedge$ i $\vee$ nie można zdefiniować $\Rightarrow$.
(d)* Udowodnić, że za pomocą $\neg$ i $\Leftrightarrow$ nie można zdefiniować ani $\wedge$, ani $\vee$.

7. * Definiujemy abstrakcyjny spójnik $p|q$ (kreska Sheffera) przez:

$$0|0 = 1,\ 0|1 = 0,\ 1|0 = 0,\ 1|1 = 0.$$

(tzn. $p|q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$), oraz abstrakcyjny spójnik $p \diamond q$ ("karo"): $p \diamond q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.
(a) Udowodnić, że przy pomocy każdego z tych spójników można zdefiniować $\wedge$ i $\neg$, a więc i wszystkie pozostałe spójniki logiczne.
(b) Udowodnić, że $|$ i $\diamond$ są jedynymi spójnikami dwuargumentowymni o tej własności.

8. Ile jest różnych tautologii o zmiennych p i q ?

9. Napisać następujące formuły w postaci (1) alternatywno-koniunkcyjnej, (2) koniunkcyjno-alternatywnej dwiema metodami:
1) poprzez ciąg formuł równoważnych, przy użyciu tautologii,
2) korzystając z tabelki.
(a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
(b) $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge r)$
(c) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$
(d) $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$

10. Korzystając z praw rachunku zdań rozwiązać następujące nierówności w dziedzinie liczb rzeczywistych.
(a) $\frac{x-4}{x-3} > 0$, (b) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} < 0$
(c) $x^2 \geq 0$, (d) $\frac{x-2}{x^2-4} > 0$, (e) $\frac{x+1}{x^2-1} > 0$.
W rozwiązaniu nie wolno powoływać sie na wykresy (mogą one być tylko ilustracją).

11. Wypisać wszystkie elementy zbiorów A i B. Ile elementów maja zbiory A i B ? Czy $A \in B$?Czy zbiory A i B są równe ? Czy mają elementy wspólne ? Czy każdy element zbioru A należy do zbioru B ?
(a) $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4}-1, \sqrt{9}, \sqrt{9}-1\},\ B = \{1, 2, 3\}$.
(b) $A = \{a, b, a\},\ B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (Uwaga: zakładamy, że a, b, c to różne przedmioty niebędące zbiorami.)
(c) $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\},\ B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$. (Uwaga: zakładamy, że a nie jest zbiorem.)
(d) $A = \{0, 1, 3\},\ B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 20\}$.
(e) $A = \emptyset,\ B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 13\}$.

12. * 10 osób stoi w szeregu, jedna za drugą, tak, że każda z nich widzi tylko osoby stojące przed nią. Każda z nich ma na głowe czapeczkę białą lub czarną. Nie wie jednak, jakiego jest ona koloru. Osoby te mają teraz kolejno, począwszy od ostatniej (która widzi 9 osób), kończąc zaś na pierwszej, powiedzieć jedno słowo: "biały" lub "czarny". Podać strategię dla tych osób gwarantującą, że zawsze przynajmniej 9 osób powie w ten sposób kolor swojej czapeczki.