Wstęp A, lista 3.
Konwersatorium 17.03.2014, ćwiczenia 21.03.2014

1. T Funkcje zdaniowe i zbiory: okreslenie funkcji zdaniowej (predykatu) jednej zmiennej i wielu zmiennych. Dwa sposoby określania zbiorów: poprzez listę elementów i poprzez funkicje zdaniową. Antynomia Russella. Rachunek zbiorów: definicje i własności działań mnogościowych sumy $\cup$ przekroju $\cap$, różnicy mnogościowej $\setminus$. Prawa pochłaniania (uwaga: nie ma ich w skrypcie, są na wykładzie). Diagramy Venna. Przemienność, łączność i wzajemna rozdzielność $\cup$ i $\cap$. Inkluzja (zawieranie) zbiorów. Pozbiór (właściwy, niewłaściwy, trywialny). Nadzbiór. Własności inkluzji zbiorów. Przestrzeń, dopełnienie ^{c}. Prawa de Morgana rachunku zbiorów. Różnica symetryczna $\triangle$ i zbiór potęgowy.

2. K Załóżmy, że a, b, c, d oznaczają pewne przedmioty. Wypisać warunki o a, b, c, d konieczne i dostateczne do tego, by zachodziły następujące równości
(a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$, (b) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$,
(c) $\{a, b, c\} = \{a, b\}$, (d) $\{\{a, b\}, c\} = \{\{a\}, c\}$,
(e) $\{\{a, b\}, \{d\}\} = \{\{a\}\}$, (f) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

3. K (a) Zaznaczyć na diagramie Venna następujące zbiory:
$(A\cup B)\cap C$, $(A\setminus B)\cup C$, $(A\cup C)\setminus(A\cap B)$, $(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$.
(b) Ile co najwyżej różnych zbiorów można uzyskać ze zbiorów A, B, C przy pomocy operacji $\cup, \cap, \setminus$? (wsk: różne zbiory odpowiadają różnym konturom w diagramie Venna)

4. K Załóżmy, że A, B, C są podzbiorami przestrzeni X. Zaznaczyć na diagramie Venna zbiory definiowane przez następujące funkcje zdaniowe. Następnie zdefiniować te zbiory przy pomocy operacji $\cup, \cap, ^c$.
(a) $x \in A \Rightarrow x \in B$
(b) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
(c) $(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow x \in C$
(d) $\neg(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow x \in C$

(wsk: rozpatrzyć po kolei wszystkie najmniejsze "kawałki" diagramu Venna. Rozstrzygnąć, czy dana funkcja zdaniowa jest zdaniem prawdziwym dla x w danym kawalku.)

5. (a) Niech $A = \{0, 3, 5, 7, 10\}, B = \{1, 2, 3, 7, 11\}, C = \{2, 5, 6, 7, 9\}$,
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Umieścić elementy zbiorów A, B, C, X w odpowiednich częściach diagramu Venna dla podzbiorów A, B, C przestrzeni X.
(b) Zaznaczyć na diagramie Venna dla podzbiorów A, B, C przestrzeni X kontur pewnego zbioru U (który można otrzymac ze zbiorów A, B, C przy pomocy operacji $\cap, \cup, \setminus, ^c$, np. $U = (A \cup B) \cap C^c$), w sposób losowy.

Wypisać elementy zbioru U. Następnie napisać przy pomocy spójników logicznych i funkcji zdaniowych $x \in A$, $x \in B$ i $x \in C$ funkcję zdaniową $\alpha(x)$ taką, że dla wszystkich $x \in X$, $x \in U \iff \alpha(x)$. (wskazówka: zacząć od prostych przykładów)

6. Wskazać zbiory skończone A, B, C, dla których
(a) $(A \cup B) \cap C \neq (A \cap C) \cup B$, (b) $(A \setminus B) \cup C \neq A \cup C$,
(c) $(C \setminus A) \cap B \neq C \cap B$.

   (wsk: w każdym przypadku zaznaczyć kontury zbiorów na diagramie Venna.)

7. Dane są pewne podzbiory A, B, C przestrzeni X. Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że:
(a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
(b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
(c) $A \cap C = \emptyset$?
W przypadku odpowiedzi pozytywnej podać (potoczne) uzasadnienie. W przypadku odpowiedzi negatywnej podać kontrprzykład, tzn. przykład, gdzie dana równość nie zachodzi. (wsk: posłużyć się pomocniczo diagramem Venna)

8. Załóżmy, że A, B, C, D są zbiorami. Udowodnić (w potocznym języku matematycznym, w (a),(b),(c) dowodząc inkluzji w obie strony), że
(a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
(b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, (c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
(d) $A \subseteq A \cup B, \quad A \setminus B \subseteq A$
(e) Jeśli $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$, to $A \cup C \subseteq B \cup D$ i $A \cap C \subseteq B \cap D$.
Dodatkowo,w punktach (a),(b),(c) napisać tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów..

   Uwaga: w każdym przypadku, gdy ma to sens, dla ilustracji warto naszkicować dany zbiór na diagramie Venna.

9. Udowodnić, że dla wszystkich zbiorów $X, Y \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mamy:
(a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$.
(b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$ lecz inkluzja odwrotna nie musi zachodzić.

10. Udowodnić, że $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ (łączność operacji różnicy symetrycznej). (wskazówka: najpierw naszkicować ten zbiór na diagramie Venna. Udowodnić najpierw, że $x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow \neg(x \in B))$, a następnie, że spójnik równoważności $\Leftrightarrow$ jest łączny, tzn. formuły $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ i $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$ są równoważne. Również formuły $\neg(p \Leftrightarrow q)$ i $p \Leftrightarrow \neg q$ są równoważne.)