Wstęp A, lista 4.

Konwersatorium 30.03.2015, ćwiczenia 10.04.2015.

0T Kwantyfikatory: zapis formalny, sformułowania potoczne. Kwantyfikatory jako uogólnione: koniunkcja, alternatywa. Kwantyfikatory zrelatywizowane (ograniczone). Kwantyfikowanie po zbiorze pustym. Tłumaczenie zdań z kwantyfikatorami przy pomocy cięć poziomych i pionowych. Rachunek kwantyfikatorów: formuły rachunku kwantyfikatorów ich interpretacje. Zasięg kwantyfikatora w formule, zmienne wolne i zmienne związane. Formuły domknięte (zdania formalne). Tautologie rachunku kwantyfikatorow: definicja, przykłady (prawa De Morgana rach. kwantyfikatorów, przemienność dużych kwantyfikatorów, przemienność małych kwantyfikatorów, rozdzielność $\forall$ względem $\wedge$ i $\exists$ względem $\vee$). Równoważność funkcji zdaniowych. Równoważność formuł domkniętych. Duży kwantyfikator jako kwantyfikator domyślny.

1. Zapisać następujące zdania przy pomocy funkcji zdaniowych o podanych zakresach, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i ewentualnie znaku równości. (wskazówka: niekiedy konieczne jest najpierw odpowiednie przeformułowanie danego zdania; zacząć od prostszych przykładów)
(a)K Koty to dranie. $X =$ zbiór kotów, $\varphi(x) = x$ to drań, $x \in X$.
(b)K W każdej rodzinie znajdzie się czarna owca. $Y =$ zbiór rodzin, $X =$ zbiór owiec, $\varphi(x) = x$ jest czarna, $x \in X$, $\psi(x, y) = x$ należy do y, $x \in X, y \in Y$.
(c)K Każdy student, który przychodzi na egzamin, jest przygotowany. (ciekawe, na co...) $X =$ zbiór studentów, $\varphi(x) = x$ przychodzi na egzamin, $x \in X$, $\psi(x) = x$ jest przygotowany, $x \in X$.
(d)K Pewien student, który przychodzi na egzamin, nie jest przygotowany.
(e)K Każde rozwiązanie równania $x^7 - x^2 + 5 = 0$ jest nieujemne. Zdania z tego i następnych trzech podpunktów zapisac używając standardowej symboliki matematycznej.
(f)K Pewne rozwiązanie równania $x^7 - x^2 = 0$ jest nieujemne.
(g)K Pewien element zbioru A, który należy do zbioru B, jest rozwiązaniem równania $x^7 - x^2 + 5 = 0$.
(h)K Żaden[1] element zbioru A, który należy do zbioru B, nie jest rozwiązaniem równania $x^7 - x^2 + 5 = 0$.
(i)K Jeżeli spośród trzech dowolnych prostych na płaszczyźnie dwie są równoległe, a trzecia jest prostopadła do jednej z nich, to jest też prostopadła do drugiej. $X =$ zbiór prostych na płaszczyźnie, funkcje zdaniowe: $x \parallel y = x$ i y są równoległe, $x, y \in X$, $x \perp y = x$ i y są prostopadłe, $x, y \in X$.
(j)* Istnieją dowolnie duże liczby pierwsze. $\mathbb{N} =$ zbiór liczb naturalnych, $\varphi(x) = x$ jest liczbą pierwszą, $x \in \mathbb{N}$, $x < y = x$ jest mniejsze od y, $x, y \in N$.
(k) Dowolne dwie proste na płaszczyźnie przecinają się w jednym punkcie lub

[1]Słowo "żaden" w odniesieniu do zdania przeczącego oznacza to samo, co "każdy". Np. "Żaden chłopiec nie płacze", to tyle, co: "Każdy chłopiec nie płacze" (to drugie zdanie jest językowo niepoprawne, choć dla matematyka ściślejsze)

są równoległe. X = zbiór prostych na płaszczyźnie, Y = zbiór punktów na płaszczyźnie, $x \parallel y$ = "x i y są równoległe", $x, y \in X$, $y \in x$ = "y leży na x'', $x \in X, y \in Y$.
(l) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszkają przynajmniej dwie osoby. Y = zbiór mieszkań w tym bloku, X = zbiór osób, $\varphi(x, y) = x$ mieszka w y, $x \in X, y \in Y$.
(m) W każdym mieszkaniu w tym bloku mieszkają co najwyżej dwie osoby. (funkcje zdaniowe jak w punkcie (f))
(n) Żaden z żołnierzy w tym szeregu nie jest wyższy od sąsiada po swojej prawej stronie. X = zbiór żołnierzy w tym szeregu, $\varphi(x, y) = x$ jest wyższy od y, $\psi(x, y) = x$ jest sąsiadem y po swojej prawej stronie, $x, y \in X$.
(o) Każdy ze studentów w tej grupie ma pomysł, który zadziwi wszystkich innych studentów w tej grupie. X = zbiór studentów w tej grupie, Y = zbiór pomysłów, $\varphi(x, y) = x$ ma $y, x \in X, y \in Y$, $\psi(y, z) = y$ zadziwi z, $y \in X, z \in X$.
(p) Każdy czlowiek zna czlowieka, który nie zna żadnego czlowieka, który nie umie czytać. X = zbiór ludzi, $\varphi(x, y) = x$ zna y, $\psi(x) = x$ umie czytać, $x, y \in X$.
(q) Żaden człowiek nie lubi pracować. X = zbiór ludzi, $\varphi(x) = x$ lubi pracować.
(r) Nie wszystkie elementy zbioru A są elementami zbioru B. Funkcje zdaniowe: $x \in A$, $x \in B$, zakres zmienności zmiennej x: przestrzeń X zawierająca oba zbiory A i B.
(s) Żaden człowiek nie zna wszystkich tych ludzi, którzy go nie znają. (funkcje zdaniowe i zakresy takie, jak w punkcie (p))

2. Podać konkretne funkcje zdaniowe (predykaty) φ, ψ na zbiorze liczb rzeczywistych takie, że odpowiednie zdania są fałszywe (świadczy to o tym, że odpowiednie formuły nie są tautologiami). Dodatkowo podać też takie predykaty na zbiorze $X = \{0, 1\}$ (wsk: wtedy $\varphi(x, y) \Leftrightarrow R(x, y)$ dla pewnej relacji R na zbiorze X).

(a) $(\exists x, y)\varphi(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y)$

(b) $(\exists x, y)\varphi(x, y) \Rightarrow \exists x \varphi(x, x)$

(c) $\forall y \exists x \varphi(x, y) \Rightarrow \forall x \varphi(x, x)$

(d) $\forall x \varphi(x, x) \Rightarrow (\forall x, y)\varphi(x, y)$

(e) $\exists x \forall y \varphi(x, y) \Rightarrow (\forall x, y)\varphi(x, y)$

(f) $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$

(g) $\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x) \Rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ Zauważyć jednak, że każda z implikacji odwrotnych jest tu tautologią.