Wstęp A, lista 5.

Konwersatorium 13.04.2015, ćwiczenia 17.04.2015.

0T. Relacje: definicja, notacja. Dziedzina i obraz relacji. Relacja odwrotna. Relacja ograniczona (obcięta) do zbioru. Diagram relacji na dwóch zbiorach. Diagram relacji na jednym zbiorze. Własności relacji: zwrotność, przechodniość (tranzytywność), symetryczność, antysymetryczność, spójność.

1K. Zaznaczyć w układzie współrzędnych Oxy wykresy następujących funkcji zdaniowych $\varphi(x,y)$. Wszystkie zmienne przebiegają tu zbiór liczb rzeczywistych.

(a) $\exists z(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ (uwaga: w przypadku, gdy para $\langle x, y\rangle$ należy do wykresu, wskazać $z \in \mathbb{R}$ świadczący o prawdziwości zdania (a), podobna uwaga dotyczy wszystkich poniższych funkcji zdaniowych z małym kwantyfikatorem. Kolejna wskazówka: najpierw sprawdzić, czy nasza formuła jest prawdziwa dla kilku konkretnych wartości x, y, np. dla $\langle x, y\rangle = \langle 0, 0\rangle, \langle 1/2, 1/2\rangle, \langle 1, 1\rangle$, potem zauważyć ogólną prawidłowość i zidentyfikować obszar tych par $\langle x, y\rangle$, dla których formuła jest spełniona. Podobnie postępować w kolejnych punktach.),

(b) $\forall z(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ (uwaga: w przypadku, gdy para $\langle x, y\rangle$ nie należy do wykresu, wskazać $z \in \mathbb{R}$ świadczący o fałszywości zdania (b), podobna uwaga dotyczy wszystkich poniższych funkcji zdaniowych z dużym kwantyfikatorem),

(c) $\forall z(x^2 + y^2 + z^2 > 1)$,

(d) $\forall z(1 < z < 2 \Rightarrow 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 8)$,

(e) $\exists z(1 < z < 2 \Rightarrow 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 8)$,

(f) $\exists z(1 < z < 2 \wedge 2 < x^2 + y^2 + z^2 < 8)$

(g) $\exists z((x-1)\cdot(y-1)\cdot z = 1)$,

(h) $\exists z(|z| < 1 \wedge x = 2y + z)$,

(i) $\forall t\exists z((x-1)t < (y-1)z)$ (uwaga: w przypadku, gdy para $\langle x, y\rangle$ należy do wykresu, dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ wskazać liczbę z świadczącą o prawdziwości zdania $\exists z((x-1)t < (y-1)z)$),

(j) $\exists t\forall z((x-1)t < (y-1)z)$ (uwaga: w przypadku, gdy para $\langle x, y\rangle$ nie należy do wykresu, dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$ wskazać liczbę z świadczącą o fałszywości zdania $\forall z((x-1)t < (y-1)z)$) ,

(k) $\exists t(x = 2t \wedge y = 3t)$,

(l) $\forall t(x = 2t \Rightarrow y = 3t)$,

(m) $\exists t(x = t^2 \wedge y = t^3 + 1)$,

(n) $\forall t(x = t^2 \Rightarrow y = t^3 + 1)$.

W każdym z przypadków zaznaczyć na osiach Ox oraz Oy odpowiednio wykresy funkcji zdaniowych $\exists y\varphi(x,y)$ oraz $\exists x\varphi(x,y)$, gdzie $\varphi(x,y)$ jest funkcją zdaniową badaną w danym punkcie (wsk: wykresy te będą rzutami na dane osie wykresu funkcji zdaniowej $\varphi(x,y)$). Które z tych funkcji zdaniowych są równoważne ?

Wskazówka: rozwiązując to zadanie nie należy się spieszyć, lecz postępować rozważnie, formalizować dane zdanie stopniowo, etapami.

2. Udowodnić lub obalić następujące twierdzenia. W każdym przykładzie wskazać założenia i tezę oraz zapisać tezę symbolicznie. Które z tez są zdaniami uniwersal-

nymi, które egzystencjalnymi, a które nie są ani takie, ani takie ? Dowody prowadzić w sposób naturalny, bez użycia spójników logicznych i symboli kwantyfikatorów.

(a) Załóżmy, że A i B są zbiorami. Wtedy istnieje zbiór C taki, że $C \subseteq A$ oraz $B \subseteq C$.

(b) Załóżmy, że A jest podzbiorem zbioru B. Wtedy istnieje zbiór C taki, że $B = A \cup C$ oraz zbiory A i C są rozłączne.

(c) Niech A i B będą dowolnymi zbiorami rozłącznymi. Wtedy każdy podzbiór C zbioru A jest rozłączny ze zbiorem B.

(d) Załóżmy, że n i m są liczbami całkowitymi. Wtedy istnieją liczby całkowite k i l takie, że n jest sumą, a m różnicą liczb k i l.

(e) Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą większą od 1. Wtedy każda liczba rzeczywista y mniejsza od x jest też mniejsza od liczby x^2.

(f) Załóżmy, że l_1 i l_2 są prostymi na płaszczyźnie Π. Jeśli każdy punkt na prostej l_1 jest odległy od pewnego punktu na prostej l_2 o mniej niż 1, to proste l_1 i l_2 są równoległe. (Uwaga: w zapisie symbolicznym użyć zapisu $d(x, y)$ na oznaczenie odległości punktów x i y.)

3. Na zbiorze $X = \{a, b, c, d, e\}$ określona jest relacja R o podanym niżej diagramie (warianty (1) i (2)). Wypisać wszystkie elementy zbioru $\{x \in X : \varphi(x)\}$, gdzie

(a) $\varphi(x) = (\exists y, z)(R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge y \neq z)$,

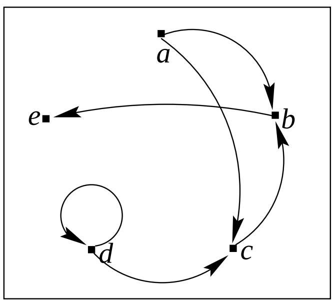
(b) $\varphi(x) = \forall y(R(x, y) \Rightarrow \exists x R(y, x))$,

(c) $\varphi(x) = \forall y(R(x, y) \Rightarrow \exists z(R(y, z) \wedge \neg R(x, z)))$,

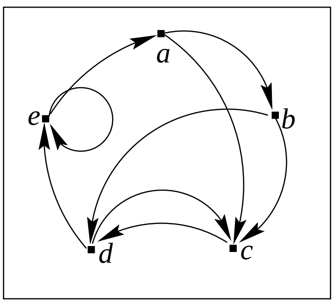
(d) $\varphi(x) = \exists y(R(x, y) \wedge \forall z(y \neq z \wedge R(x, z) \Rightarrow R(y, z)))$.

W każdym przypadku najpierw uważnie przeczytać i zrozumieć, co mówi $\varphi(x)$.

(1) X



(2) X



4. Zapisać symbolicznie następujące funkcje zdaniowe. Wszystkie zmienne przebiegają zbiór liczb naturalnych. (wsk: niekiedy trzeba daną funkcję zdaniową przeformułować, by uwidocznić kwantyfikatory)

(a) x jest liczbą parzystą.

(b) x jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych (niekoniecznie różnych).

(c) x jest liczbą pierwszą.

(d) x nie jest liczbą pierwszą.

(e) x jest wspólnym dzielnikiem liczb y i z.

(f) x jest największym wspólnym dzielnikiem liczb y i z.

(g) Przy dzieleniu przez 4 liczba x daje resztę 1 lub 2.