Wstęp A, lista 6.

Konwersatorium 20.04.2015, ćwiczenia 24.04.2015.

0T. Relacje częściowego porządku i liniowego porządku. Elementy porównywalne w sensie relacji porządku. Poprzednik, następnik. Diagramy Hassego. Elementy maksymalne, minimalne, najmnejsze, największe. Łańcuch. Ograniczenie górne(dolne), kres górny (dolny) danego zbioru. Porządek leksykograficzny.

1K. Na zbiorze $X = \mathbb{R}^2$ definiujemy relację częściowego porządku $\leq$ wzorem:

$$\langle x, y\rangle \leq \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x \leq u \wedge y \leq v.$$

(a) Zaznaczyć w układzie współrzędnych Oxy zbiór par porównywalnych z parą $\langle 2, 1\rangle$ (ogólniej: z daną parą $\langle u, v\rangle$).
(b) Które z następujących zbiorów są łańcuchami w X ?
$A_1 = \{\langle x, x\rangle : x \in \mathbb{Z}\}$, $A_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $A_3 = \{\langle x, y\rangle : y = mx + n\}$ (m, n to ustalone parametry rzeczywiste), $A_4 = \{\langle x, y\rangle : |x| < 1 \wedge |y| < 2\}$,
$A_5 = \{\langle x, y\rangle : x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$.
(c) Które ze zbiorów w (b) mają ograniczenie górne lub dolne ? Wyznaczyć zbiory tych ograniczeń. Wyznaczyć kresy górne i dolne (o ile istnieją).
(d) Ograniczając relację $\leq$ kolejno do zbiorów podanych w (b) sprawdzić, czy mają one w tych zbiorach elementy maksymalne i jakie to są elementy.

2. Niech $A = \{0, 1, 2\}$. Relacja inkluzji $\subseteq$ jest częściowym porządkiem na zbiorze $X = \mathcal{P}(A)$.
(a) Wypisać i nazwać literami a, b, c, d, e, f, g, h wszystkie podzbiory zbioru A (tzn. elementy zbioru X).
(b) Narysować diagram Hassego relacji cześciowego porządku $\subseteq$ na zbiorze $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

3. Rozważmy zbiór $\mathbb{N}$ częsciowo uporządkowany przez relację $n|m$ (tu: $n|0$ dla wszystkich n). Niech $A = \{2, 3, 5, 4, 6, 10, 15\}$.
(a) Narysować diagram Hassego relacji $n|m$ ograniczonej do zbioru A.
(b) Znaleźć kresy dolny i górny zbioru A w zbiorze $\mathbb{N}$.
(c) Które elementy w zbiorze A są minimalne lub maksymalne ? (względem relacji $n|m$ obciętej do zbioru A)

4. Na zbiorze $X = \mathbb{R}^2$ definiujemy relację $\preceq$ wzorem:

$$\langle x, y\rangle \preceq \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x < u \vee (x = u \wedge y \leq v).$$

(a) Zaznaczyć w układzie współrzędnych Oxy zbiory punktów:

$$U = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \langle 1, 2\rangle \preceq \langle x, y\rangle\}, \quad V = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : \langle 1, 2\rangle \succeq \langle x, y\rangle\}$$

oraz analogiczne zbiory dla par $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}^2$ zamiast $\langle 1, 2\rangle$.
(b)Sprawdzić, że $\preceq$ jest porządkiem liniowym na zbiorze X (zwanym porządkiem leksykograficznym, w podobny sposób porządkuje się hasła w encyklopedii).
(c)* Napisać analogiczną definicję porządku leksykograficznego na zbiorze $\mathbb{R}^5$.

5. Niech $A = \{a, b, c\}$, gdzie a, b, c to różne przedmioty. Zdefiniować na zbiorze A relację R, która jest

(a) zwrotna, lecz nie symetryczna i nie antysymetryczna,

(b) symetryczna i przechodnia, lecz nie zwrotna,

(c) antysymetryczna i zrwotna, lecz nie przechodnia.

W każdym przypadku dodatkowo narysować diagram relacji R. Ponadto w każdym przypadku rozstrzygnąć, ile jest różnych relacji R o żądanych własnościach.

6. Załóżmy, że $\leq$ jest liniowym porządkiem na zbiorze X, zaś $A \subseteq X$. Używając funkcji zdaniowych $x \leq y$ oraz $x \in A$ (gdzie zmienne x, y przebiegają zbiór X) oraz symboli logicznych i $\neq, \in, \notin$) napisać zdania i funkcje zdaniowe:
(a) x jest następnikiem y.
(c) Każdy następnik x jest poprzednikiem y.
(d) Pewien następnik x jest poprzednikiem y. (uwaga: czy funkcje zdaniowe z punktu (c) i (d) są równoważne ?)
(e) x jest mniejsze od y i między x i y są przynajmniej dwa różne elementy zbioru X.
(f) x jest kresem górnym zbioru A,
(g) x jest kresem dolnym zbioru A.
Nastepnie napisać zaprzeczenia tych funkcji zdaniowych oraz przekształcić je równoważnie (korzystając z praw de Morgana), by wyeliminować użycie negacji. (wskazówka: punkty (f) i (g) były na wykładzie i w skrypcie, $\neg x \leq y \Leftrightarrow y \leq x \wedge x \neq y$).

7. Które z następujących relacji są (1) zwrotne, (2) symetryczne, (3) antysymetryczne, (4) przechodnie, (5) spójne ? W przypadku relacji na $\mathbb{R}$ naszkicować zbiór R w układzie współrzędnych Oxy (o ile jest to możliwe)

(a) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : 3 \mid x - y\}$

(b) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : 2 \mid x + y\}$

(c) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 : x = 2 \wedge y = 3\}$

(d) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$

(e) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$

(f) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$

(g) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \neq 3\}$

(h) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : (x \leq 5 \wedge y \leq 5 \wedge x = y) \vee (x > 5 \wedge y > 5 \wedge 2|x + y)\}$

(i) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 : x > y \vee y > x\}$

(j) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$

(k) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{N}\}$

(l)* $R = \{\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 : X \triangle Y$ jest zbiorem skończonym$\}$

Uwaga: każdy podpunkt w tym zadaniu może być pracochłonny. By rostrzygnąć, czy dana relacja ma rozważaną własność, należy rozstrzygnąć, czy odpowiednie zdanie (definiujące daną własność) jest w danym przypadku prawdziwe.