Wstęp A, lista 7.

Konwersatoria: 27.04.2015 i 4.05.2015. Ćwiczenia: 8.05.2015.

1. T Partycja zbioru X. Relacja równoważności: definicja, klasa abstrakcji, zasada abstrakcji, zbiór ilorazowy. Funkcje: definicja, dziedzina, obraz, wykres. Przykłady funkcji (w tym rzuty na osie w produkcie kartezjańskim). Injekcja, surjekcja, bijekcja. Funkcja odwrotna. Składanie funkcji, łączność. Ograniczanie i rozszerzanie funkcji.

2. K Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych, 3 kwiatków żółtych i 3 kwiatków niebieskich. Określamy na zbiorze X relację równoważności wzorem:

$$x \sim y \iff x \text{ i } y \text{ są tego samego koloru.}$$

(a) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $X/\sim$?
(b) Dany jest podzbiór A zbioru X. Używając symboli matematycznych, logicznych i $\sim$ zapisać symbolicznie zdanie:

($*$) W zbiorze A nie ma dwóch różnych kwiatków tego samego koloru.

(b) Ile jest podzbiorów A zbioru X o własności ($*$) ?

3. K (a) Podać przykład partycji (podziału) zbioru $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ na trzy zbiory. Wypisać elementy tej partycji.
(b) Napisać relację równoważności R na zbiorze X, której klasami abstrakcji są zbiory naszej partycji. Napisać R jako zbiór par uporządkowanych.
(c) Ile jest różnych partycji zbioru X na trzy zbiory ? Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze X o trzech klasach abstrakcji ?

4. K Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze $Z = \{0, 1, 2\}$? (wskazówka: ile jest różnych partycji zbioru Z?)

5. K Określamy relację $\sim$ na zbiorze $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ przez: $A \sim B \iff A \triangle B \subseteq \{0, 1, 2\}$.
(a) Udowodnić, że $A \sim B \iff A \setminus \{0, 1, 2\} = B \setminus \{0, 1, 2\}$.
(b) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności.
(c) Wypisać wszystkie elementy klasy abstrakcji zbioru nieparzystych liczb naturalnych.

6. K Sprawdzić, że każda z poniższych relacji na zbiorze X jest relacją równoważności.
(a) $X = \mathbb{Z}$, $n \sim m \Leftrightarrow 3|(n-m)$,
(b) $X = \mathbb{R}^2, v = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$.

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists r \in \mathbb{R})(x - y = rv).$$

W każdym przypadku opisać klasy abstrakcji. W (b) zrobić rysunek.

7. K Na ile sposobów można wybrać podzbiór A zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$, by różnica żadnych dwóch różnych liczb z A nie dzieliła się przez 5?

8. K Załóżmy, że $\sim_1, \sim_2$ są relacjami równoważności na zbiorze X oraz $\sim_1$ ma 3, a $\sim_2$ 5 klas abstrakcji. Czy wtedy relacje:
(a) $R = \sim_1 \cup \sim_2$, (b) $S = \sim_1 \cap \sim_2$
też są relacjami równoważności ? Jeśli tak, to co można powiedzieć o liczbie klas abstrakcji tych nowych relacji ?

9. K Załóżmy, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze X, $a \in X$ oraz $b \in [a]_\sim$. Udowodnić, że $[a]_\sim = [b]_\sim$.

10. Załóżmy, że $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Udowodnić następujące twierdzenia.
(a) Załóżmy, że liczba c ogranicza z góry zbiór A oraz ogranicza z dołu zbiór B. Wtedy dla każdych liczb $a \in A$ i $b \in B$ mamy $a \leq b$.
(b) Załóżmy, że każda liczba $a \in A$ ogranicza z dołu zbiór B. Wtedy każda liczba $b \in B$ ogranicza z góry zbiór A.
(c) Załóżmy, że liczba a oganicza z góry zbiór A. Wtedy liczba $-a$ ogranicza z dołu zbiór $-A = \{-x : x \in A\}$.
(d)* Załóżmy, że liczba a jest kresem górnym zbioru A oraz b jest kresem górnym zbioru B. Wtedy liczba $a + b$ jest kresem górnym zbioru $A + B = \{x + y : x \in A \wedge y \in B\}$.

11. Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych i 3 kwiatków żółtych.
(a) Zdefiniować funkcję $f : X \to X$ taką, że kolor kwiatka x jest zawsze inny niż kolor kwiatka $f(x)$.
(b) Ile jest takich funkcji ? Czy istnieje taka funkcja, która jest 1-1 ? Czy istnieje taka funkcja, która jest "na" ?

12. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ która:
(a) jest 1-1, ale nie jest "na",
(b) jest "na", ale nie jest 1-1.
(c) ma tę własność, że $f \circ g$ jest 1-1, lecz $g \circ f$ nie jest 1-1. Tu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję daną wzorem $g(x) = e^x$.
(d) ma tę własność, że $f \circ g$ jest "na" (g to funkcja z punktu (c)).

13. Dla podanych funkcji f i g znaleźć ich złożenie $g \circ f$ i $f \circ g$. (tzn. podać wzór lub opisać słowami $(g \circ f)(x)$). Rozstrzygnąc, /które z tych funkcji są $1-1$, "na". W przypadku, gdy f jest bijekcją, znaleźć funkcję f^{-1}.
(a) X =zbiór kól na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, $f : X \to \mathbb{R}^2$, $f(x) =$ środek koła x, $g : \mathbb{R}^2 \to X$, $g(x)$ =koło o środku x i promieniu $\|x\| + 1$. Znaleźć zbiór tych kół x, dla których $gf(x) = x$. Znaleźć przekrój wszystkich tych kół.
(b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 1$, $f(x) = x^3 + 1$. Narysować wykres funkcji $g \circ f$ i f^{-1}.
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x + 1, x - 1)$.

14. Załóżmy, że $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$.
(a) Udowodnić, że jeśli f jest bijekcją, to $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$.
(b) Udowodnić, że jeśli f jest bijekcją, to $(f^{-1})^{-1} = f$.

(c) Udowodnić, że jeśli f i g są 1-1, to $g \circ f$ też jest 1-1.
(d) Udowodnić, że jeśli $g \circ f$ jest 1-1 i f jest "na", to g jest 1-1. Podać przykład, gdzie $g \circ f$ jest 1-1, lecz g nie jest 1-1.
(e) Udowodnić, że jeśli $g \circ f$ jest "na" i g jest 1-1, to f jest "na". Podać przykład, gdzie $g \circ f$ jest "na", lecz f nie jest "na".
Wskazówka: pomocniczo zrobić rysunek, zastosować gonitwę po diagramie.

15. * Udowodnić, że każdą bijekcję $f : X \to X$ można przedstawić jako złożenie dwóch bijekcji $g, h : X \to X$ takich, że $g = g^{-1}$ i $h = h^{-1}$.