Wstęp A, lista 8.

Ćwiczenia 15.05.2014. S: do samodzielnego wykonania (bez omawiania na ćwiczeniach).

1. T Obraz i przeciwobraz zbioru względem funkcji, podstawowe własności. Ciąg: definicja, rodzaje ciągów. Funkcje i ciągi monotoniczne: (słabo) rosnące i (słabo) malejące. Działania uogólnione na zbiorach: przekrój, suma, produkt kartezjański (indeksowanej) rodziny zbiorów: definicje, podstawowe własności.

2. S (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Znaleźć: $f[[0,1]]$, $f[[-2,-1]]$, $f^{-1}[(-\infty,-6]]$, $f^{-1}[\{-3,-4\}]$, $f[\{1,2\}]$.
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sin x + 1$. Znaleźć: $f[[0,\frac{3}{2}\pi]]$, $f[\{0,\pi\}]$, $f^{-1}[(\frac{1}{2},\infty)]$, $f^{-1}[(-\infty,1]]$, $f^{-1}[\{0\}]$.

3. Określamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{, gdy } x \geq 0 \\ -x-1 & \text{, gdy } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Zapisać symbolicznie funkcję zdaniową $f(x) = y$, nie używając symbolu f oraz nawiasów klamrowych.
   (b) Naszkicować wykres funkcji $f \circ f$.
   (c) Wyznaczyć obraz i przeciwobraz względem funkcji f i $f \circ f$ przedziałów: $[0,1]$ i $[-1,0]$.

4. Niech $f : X \to Y$. Udowodnić następujące twierdzenia.
   (a) Załóżmy, że $X = Y$ oraz dla każdego zbioru $A \subseteq X$ mamy $A \subseteq f[A]$. Wtedy $f = id_X$.
   (b) Załóżmy, że $X = Y$ oraz dla każdego zbioru $A \subseteq X$ mamy $f[A] \subseteq A$. Wtedy $f = id_X$.
   (c) Załóżmy, że Y ma przynajmniej 3 elementy oraz przeciwobraz względem funkcji f każdego dwuelementowego podzbioru Y jest dwuelementowy. Wtedy f jest bijekcją.
   (d) Załóżmy, że $A \subseteq X$. Wtedy $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$. Podać przykład, gdzie inkluzja jest właściwa (tzn. równość nie zachodzi). (wsk: pomocniczo w każdym z dowodów narysować diagram, zastosować "gonitwę po diagramie".)

5. Załóżmy, że $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. zapisać symbolicznie:
   (a) Funkcja f jest ograniczona.
   (b) Istnieją dowolnie duże argumenty, dla których wartość funkcji f jest mniejsza od wartości funkcji g.
   (c) Począwszy od pewnego miejsca funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne.
   (d) Żadna wartość funkcji f nie jest miejscem zerowym funkcji g. (tu: miejsce zerowe funkcji to taki argument, dla którego wartość funkcji to zero)
   (e) Funkcja f jest ciągła w punkcie x (wg definicji Cauchy'ego).

Zapisać też symbolicznie negacje tych zdań (funkcji zdaniowych), jednak bez użycia symbolu negacji.

6. Napisać następujące zdania o ciągu liczb rzeczywistych (a_n) używając symboli logicznych, symboli matematycznych ($<, =, +, \cdot$, cyfry) oraz symboli a_n na oznaczenie wyrazów ciągów (a_n).

   (a) Ciąg (a_n) jest ograniczony.

   (b) żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest dodatni.

   (c) Ciąg (a_{2n}) jest rozbieżny do $+\infty$, podczas gdy ciąg (a_{2n+1}) jest rozbieżny do $-\infty$.

   (d) Ciąg (a_n) jest słabo monotoniczny.

   (e) Nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) jest dodatnich.

   (f) Ciąg (a_n) zawiera podciąg zbieżny do 0 (uwaga: nie wolno użyć symbolu oznaczającego ciąg liczb naturalnych).

7. Napisać negacje zdań (funkcji zdaniowych) z poprzedniego zadania bez użycia symbolu negacji (dodatkowo wolno używać symboli $\leq, \neq$).

8. Wyznaczyć następujące zbiory:

$$(a) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n}], \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}[\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n}],$$

   (b) Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(k-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}), \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}(k-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}),$$

$$(c) \quad \bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}(k-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}) \qquad \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}(k-\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2})$$

9. *. Dowieść, że jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ oraz $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, to

$$\bigcap_n (A_n \cup B_n) = \bigcap_n A_n \cup \bigcap_n B_n.$$

10. *. Załóżmy, że $k > n$ oraz danych jest k różnych niepustych podzbiorów $A_1, \ldots, A_k$ zbioru liczb $\{1, \ldots, n\}$. Udowodnić, że istnieją rozłączne niepuste zbiory indeksów $I, J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ takie, że $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$.