Wstęp A, lista 9.

Ćwiczenia 22.05.2015. Konwersatorium: 18.05.2015.

0T. Zbiory równoliczne: definicja, własności, przykłady. Liczby kardynalne (moce zbiorów): liczby naturalne, $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$ (continuum). Definicja zbioru skończonego. Definicja zbioru nieskończonego w sensie Dedekinda.

1K. Udowodnić następujące fakty (wsk: zrobić rysunek, w każdym przypadku dowód polega na skonstruowaniu funkcji świadczącej o równoliczności danych zbiorów).
(a) Jeśli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ oraz $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.
(b) Jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.
(c) Jeśli $A \sim B$ i $C \cap (A \cup B) = \emptyset$, to $A \cup C \sim B \cup C$.
(d) Jeśli $A \sim B$, to $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$. (**) Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna ?

2K. Załóżmy, że zbiór X zawiera $\mathbb{N}$ oraz $x \in X \setminus \mathbb{N}$. Udowodnić, że $X \sim X \setminus \{x\}$. (wsk: wzorować się na dowodzie z wykładu, że $[0,1] \sim [0,1)$).

3K. (a) Sprawdzić, że funkcja $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dana wzorem $f(n,k) = 2^n(2k+1)-1$ jest 1-1 i "na". (funkcja ta w jawny sposób pokazuje równoliczność zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$)
(b) Korzystając z funkcji f z podpunktu (a) zdefiniować bijekcję $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

4. Zdefiniować funkcje świadczące o równoliczności zbiorów A i B. Tam, gdzie to możliwe, podać wzór na wartość funkcji.
(a) $A = \{1,2\}$, $B = \{5,7\}$.
(b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x^2 < 70\}$.
(c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{0\}$.
(d) A = zbiór parzystych liczb naturalnych, B = zbiór nieparzystych liczb naturalnych.
(e) A = zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 3, B = zbiór liczb całkowitych niepodzielnych przez 3. W punktach (d),(e) napisać najpierw w sposób formalny definicje zbiorów A, B.
(f) $A = \mathbb{Z}^+$, $B = \mathbb{Z}$.
(g) $A = (0,\infty)$, $B = \mathbb{R}$.
(h) $A = (1,\infty)$, $B = \mathbb{R}$.
(i) $A = (0,1)$, $B = \mathbb{R}$ (wsk: patrz przykłady z wykładu).
(j) $A = [1,2], B = [1,2)$
(k) $A = [1,2], B = (1,2)$
(l) $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
(m) $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$
(n) A = zbiór punktów okręgu o promieniu r bez jednego punktu, B = zbiór punktów na prostej.
(o) A i B to dwa trójkąty podobne. (wsk: do (k),(l): funkcje można określać przez opis geometryczny)
(p) A = koło na płaszczyźnie, B = to samo koło, ale bez jednego (dowolnego) punktu.
(q) $A = [0,1]$, $B = [0,1] \cup [2,3]$.

5. Załóżmy, że $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ oraz $A \sim C$ i $B \sim D$. Czy stąd wynika, że $(B \setminus A) \sim (D \setminus C)$? (wsk: rozpatrzyć różne przykłady, np. z poprzedniego zadania)

6. Załóżmy, że $f : X \to Y$ jest 1-1 oraz $A, B \subseteq X$. Udowodnić, że $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$.

7*. (1) Załóżmy, że zbiór X jest skończony, n-elementowy, $f : X \to X$ i dla pewnego $k > 0$, f^k jest funkcją stałą. Dowieść, że wówczas f^k jest funkcją stałą dla pewnego $k \leq n$.
(2) Załóżmy, że $f : X \to X$ jest różnowartościowa, lecz nie jest "na". Udowodnić, że X jest zbiorem nieskończonym. (wsk: nie wprost)

EGZAMIN.

Odbędzie się w piątek 26 czerwca 2015, początek godz. 9.00 (przydział studentów do sal będzie podany później). Czas trwania: 120 minut. Egzamin będzie pisemny, składać się będzie z 5 zadań (z licznymi podpunktami) po 5 punktów każde (razem 25 punktów). Na egzamin należy przynieść indeks. Do egzaminu dopuszczeni są tylko studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia na ocenę przynajmniej 3.0.

Wymagania na egzaminie: na ocenę 3.0–3.5: znajomość materiału z pierwszych 10 rozdziałów skryptu i umiejętność rozwiązywania zadań. Na ocenę 4.0: dodatkowo rozdziały 11 i 13. Na ocenę wyższą: cały skrypt, znajomość dowodów twierdzeń.

Skala ocen na egzaminie: $<$ 15 punktów: 2.0, $\geq$ 15: 3.0, $\geq$ 18: 3.5, $\geq$ 20: 4.0.

Osoby, które uzyskają przynajmniej 21 punktów bedą mogły zdawać ustnie na oceny 4.5 lub 5.0.

Ogłoszenie wyników egzaminu pisemnego: ok. 13.30 – 14:00.

ok. 14:00–15.00: oglądanie ocenionych prac przez studentów, sala 604, ewentualne reklamacje, odbiór indeksów z wpisanymi ocenami.

Później indeksy można będzie odebrać w sekretariacie dydaktycznym (pok. 315).