ALGEBRA 1, Lista 1

Konwersatorium 9.10.2017 i Ćwiczenia 11.10.2017.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium. Na 1. kartkówce (11.10.2017) obowiązują zadania z bieżącej listy oznaczone literą S oraz zadania z bieżącej listy oznaczone literą K, omówione wcześniej na konwersatorium. Na kolejnych kartkówkach dodatkowo obowiązują zadania z poprzedniej listy, nieoznaczone literą K i S.

0S Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Definicja grupy i pierwsze przykłady grup. Transport działania poprzez bijekcję.

1S Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2 Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.

(a)S $A = \mathbb{N}_+$; $m * n = \mathrm{NWD}(m, n)$. Rozważyć też $m * n = \mathrm{NWW}(m, n)$.

(b)S $A = \mathbb{N}$; $x * y = x + 2^y$.

(c)S $A = \mathbb{N}$; $x * y = 2^{xy}$.

(d)S $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = a/b$.

(e)S $A = \mathbb{R}$; $x * y = (x + y)^2$.

(f)S $A = \mathbb{N}$; $x * y = 2^{x+y}$.

(g)S $A = \mathbb{N}$; $x * y = x2^y$.

(h)K $A = \mathbb{N}_+$; $m * n = m^n$.

(i)K $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.

3K Dana jest bijekcja $f : A \to A$ o następujących wartościach: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 4$. Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f, zaś $\circ$ działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie $\cdot_6$ poprzez funkcję f. Sporządzić tabelki tych działań.

4K Przypomnieć sobie, co to jest postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej oraz definicje dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

(a) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r.

(b) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r?

5 Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.

(a) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.

(b) $A = \mathbb{R}$; $x * y = x + y + 2$.

(c) $A = \mathbb{N}$; $x * y = \min(x, y)$.

(d) $A = \mathbb{N}$; $x * y = \max(x, y)$.

(e) $A = \mathbb{N}$; $x * y = x$.

(f) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q.

(g) A to płaszczyzna; $P * Q$ to obraz punktu P w symetrii środkowej względem punktu Q.

6 Załóżmy, że $f : A \to B$ jest bijekcją, $\circ$ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie $\circ$ poprzez funkcję f. Udowodnić, że:

(a) jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);

(b) jeśli $\circ$ ma element neutralny w A, to $*$ ma element neutralny w B;

(c) jeśli $(A, \circ)$ jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.

7 Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$ (wskazówka: dla danego elementu $a \in A$ rozważyć elementy $a^{2^k}, k = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie a^l oznacza $\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{l \text{ razy}}$).

8 Podać przykład działania $*$ na zbiorze $\{0, 1\}$ takiego, że

$$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$

Ile istnieje takich działań?