ALGEBRA 1, Lista 10

Ćwiczenia 03.01.2018.

0S. Materiał teoretyczny: Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności. Przykłady: $\mathbb{Q}$ jako ciało ułamków $\mathbb{Z}$ i ciało funkcji wymiernych. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R (definicja). Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ i w dowolnym pierścieniu euklidesowym R.

1S. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:

(a) $3X^4 + 4X^3 - X^2 + 5X - 1$ przez $2X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;

(b) $X^7 + X^6 + X^4 + X + 1$ przez $X^3 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$;

(c) $20 + 8i$ przez $7 - 2i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2S. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.

(a) $a = 33,\ b = 42,\ R = \mathbb{Z}$.

(b) $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1,\ b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2,\ R = \mathbb{Q}[X]$.

(c) $a = X^4 + 2,\ b = X^3 + 3,\ R = \mathbb{Z}_5[X]$.

3S. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?

(a) $a = 5$, $b = -5$, $R = \mathbb{Z}$.

(b) $a = 2$, $b = 4$, $R = \mathbb{Z}$.

(c) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Q}[X]$.

(d) $a = X + 1$, $b = 5X + 6$, $R = \mathbb{Q}[X]$.

(e) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Z}[X]$.

(f) $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.

(g) $a = 1 + i$, $b = 2 + i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.

4. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.

(a) $a = 2891,\ b = 1589$ w $R = \mathbb{Z}$,

(b) $a = X^4 + X + 1,\ b = X^3 + X^2 + X$ w $R = \mathbb{Z}_3[X]$,

(c) $a = 4 - i,\ b = 1 + i$ w $R = \mathbb{Z}[i]$.

5. Czy funkcja $\delta(W) = \deg(W)$ jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

6. Niech K będzie ciałem. Udowodnić, że w pierścieniu euklidesowym $K[X]$ (normą euklidesową jest stopień wielomianu) iloraz i reszta w dzieleniu z resztą są wyznaczone jednoznacznie.

7. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.

(a) 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.

(b) 327 w $\mathbb{Z}_{2018}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.

8. Załóżmy, że R jest dziedziną oraz $a, b \in R \setminus \{0\}$.

   (a) Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$ takie, że $aq = b$. Wtedy q nazywamy *ilorazem* b przez a i oznaczamy $\frac{b}{a}$.

   (b) Załóżmy, że $d \in R$ jest wspólnym dzielnikiem a i b. Udowodnić, że $\frac{ab}{d}$ jest wspólną wielokrotnością a i b, tzn. $\frac{ab}{d}$ jest podzielne przez a oraz przez b w R.