ALGEBRA 1, Lista 11

Konwersatorium 8.01.2018 i Ćwiczenia 10.01.2018.

0S. Materiał teoretyczny: Twierdzenie Bezout(a). Podstawowe twierdzenie arytmetyki. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Opis elementów nierozkładalnych pierścienia $\mathbb{C}[X]$ oraz pierścienia $\mathbb{R}[X]$.

1K. Udowodnić, że:

(a) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;

(b) ciało $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

(c) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

2K. Wskazać nierozkładalny wielomian:

(a) stopnia 2 nad $\mathbb{Z}_5$;

(b) stopnia 3 nad $\mathbb{Z}_7$;

(c) stopnia 4 nad $\mathbb{Z}_2$.

3K. Które z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 1+i, 2+i, 3+i, 4+i, 5+i$ są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$?

4. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.

(a) Udowodnić, że $(X-a)|(X^{p-1}-1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

(b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1}-1)/(X-a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $p=5$ i $a=2$.

(c) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[X]$ zachodzi:

$$(X^{p-1}-1) = (X-1)(X-2)\ldots(X-p+1).$$

5. Załóżmy, że R jest dziedziną i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n. Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R).

6. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3+5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.

7. (a) Załóżmy, że wielomiany $W, V \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ są względnie pierwsze. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S, T \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:

$$\frac{1}{WV} = \frac{S}{W} + \frac{T}{V}.$$

(b) Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $T \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V}{W}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz W jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia $\leqslant 2$ (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne).

8. Rozważmy pierścień

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(podpierścień ciała liczb rzeczywistych) oraz funkcję

$$d : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{N}, \quad d\left(n + m\sqrt{2}\right) = \left|n^2 - 2m^2\right|.$$

(a) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ przedstawienie x w postaci $n + m\sqrt{2}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ jest jednoznaczne.

(b) Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy $d(xy) = d(x)d(y)$.

(c) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy: $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 1$.

(d) Wskazać nieskończenie wiele elementów $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$.

(e) Znaleźć rozkład liczby 2 na iloczyn czynników nierozkładalnych w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

9. Załóżmy, że R jest dziedziną, element $p \in R \setminus R^*$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że element $q = up$ też jest nierozkładalny.