ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 22.01.2018 i Ćwiczenia 24.01.2018 (bez kartkówki).

0S. Materiał teoretyczny: Twierdzenie o pierwiastach wymiernych wielomianu. Kryterium Eisensteina. Chińskie twierdzenie o resztach. Ideał w pierścieniu R. Ideał główny. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy. Jądro i obraz homomorfizmu pierścieni przemiennych z 1 oraz zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie pierścieni. Opis pierścienia ilorazowego $K[X]/(W)$ (K jest ciałem), postać normalna elementów tego pierścienia oraz implikacja: jeśli W jest nierozkładalny, to pierścień $K[X]/(W)$ jest ciałem.

1. W następujących pierścieniach wyznaczyć wszystkie ideały.

   (a)K $\mathbb{Z}_{18}$.

   (b)K $\mathbb{Q}$.

   (c)S $\mathbb{R}$.

   (d)K $\mathbb{C}[X]$.

   (e)S $\mathbb{Z}[i]$.

2S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.

   (a) $\mathbb{Z}_6/(3)$

   (b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3/((1,2))$

3. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych i w postaci normalnej. Które z tych pierścieni ilorazowych są ciałami?

   (a)S $3X+4+I$ i $5X-2+I$ w $\mathbb{R}[X]/(X^2-7)$.

   (b)S $X^2+3X+1+I$ i $-2X^2+4+I$ w $\mathbb{Q}[X]/(X^3+2)$.

   (c)K X^2+1+I i $X+1+I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3+X+1)$.

4K. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wskazówka: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni.

   (a) $\mathbb{R}[X]/(X^2+5) \cong \mathbb{C}$.

   (b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a+b\sqrt{7} : a,b \in \mathbb{Q}\}$.

   (c) $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$.

   (d) $\mathbb{R}[X,Y]/(X+Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.

5. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:

   (a) X^4-9X+3 w $\mathbb{Q}[X]$;

   (b) X^3-4X+1 w $\mathbb{Q}[X]$;

   (c) X^8-16 w $\mathbb{C}[X]$;

   (d) X^8-16 w $\mathbb{R}[X]$;

   (e) X^8-16 w $\mathbb{Q}[X]$;

   (f) X^8-16 w $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

6. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu?

(a) $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(b) $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(c) $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(d) $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$.

(e) $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(f) $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$.

7. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach. Wskazówka: obliczyc wartość wyznacznika modulo 10 i modulo 11.

8. Załóżmy, że I, J są ideałami w pierścieniu R. Udowodnić, że $I \cap J$ oraz

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

też są ideałami w R. Podać przykład, gdzie $I \cup J$ nie jest ideałem w R.

9. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

(a) $(2) \cap (3)$ w $\mathbb{Z}$;

(b) $(12) \cap (18)$ w $\mathbb{Z}$;

(c) $(X^2 - 1) \cap (X + 1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.

10. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

(a) $(2) + (3)$ w $\mathbb{Z}$;

(b) $(9) + (12)$ w $\mathbb{Z}$;

(c) $(X^2 + X + 1) + (X^2 + 1)$ w $\mathbb{Z}_2[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.