ALGEBRA 1, Lista 2

Konwersatorium 16.10.2017 i Ćwiczenia 18.10.2017.

0S. Materiał teoretyczny: pojęcie podgrupy, homomorfizmu grup i izomorfizmu grup. Notacja multyplikatywna i addytywna. Grupy permutacji i grupy macierzy. Grupy izometrii własnych prostokąta i trójkąta równobocznego, grupa czwórkowa Kleina K_4. Izomorfizm grupy izometrii własnych trójkąta równobocznego i S_3.

1. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i $A \subseteq G$. Dla poniższych $(G, \cdot)$ i A sprawdzić, czy podzbiór A jest zamknięty na działanie $\cdot$. Jeśli tak, to sprawdzić czy A jest podgrupą grupy $(G, \cdot)$.

   (a)S $G = (\mathbb{C}, +)$; $A = S^1$ (okrąg).

   (b)S $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = (0, \infty)$ (dodatnie liczby rzeczywiste).

   (c)S $G = S_3$; $A = \left\{ \mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   (d)S $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$; $A = \{0, 2, 4, 6\}$.

   (e)K $G = (\mathbb{Z}, +)$; $A = \mathbb{Z}_7$.

   (f)K $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$ (n-te pierwiastki z 1).

2K. Zrozumieć zasadę działania suwaka logarytmicznego używając pojęcia izomorfizmu (pewnych) grup.

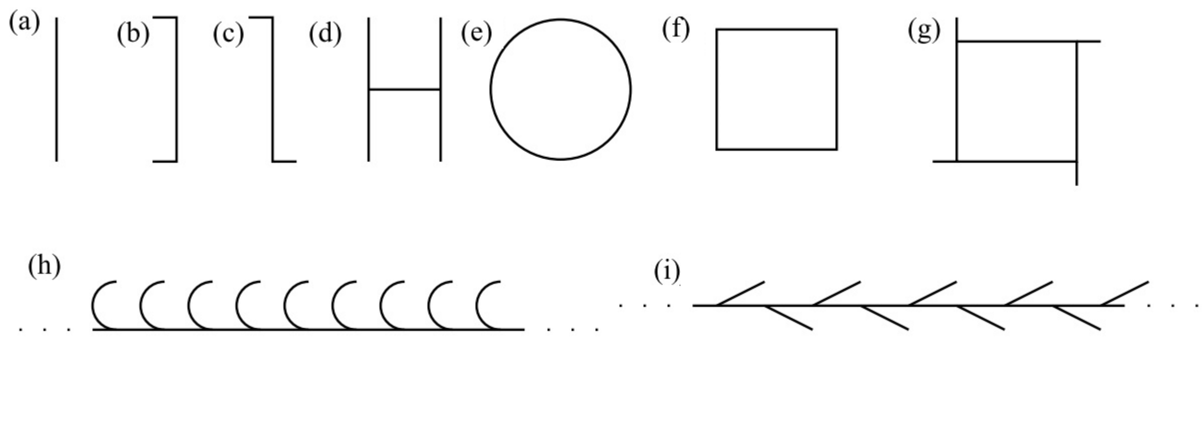
3K. Niech G będzie grupą. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g, h \in G$ udowodnić, że:

   (a) $g^k g^l = g^{k+l}$;

   (b) $(g^k)^l = g^{kl}$;

   (c) jeśli $gh = hg$, to $(gh)^k = g^k h^k$.

4. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur płaskich. Które z tych grup są ze sobą izomorficzne? Które z tych grup są abelowe?



5. Dowieść, że w dowolnej grupie $(G, \cdot)$ dla dowolnych $a, b, c, d \in G$ mamy:

   (a) $(abcd)^{-1} = d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}$.

   (b) $(a^{-1}ba)^k = a^{-1}b^k a$, gdzie k to dowolna liczba całkowita.

6. Załóżmy, że w grupie G, $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.

7. Udowodnić, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $(ab)^2 = a^2b^2$ dla wszystkich $a, b \in G$.

8. Wskazać 6 różnych izomorfizmów między grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego i grupą permutacji S_3.