ALGEBRA 1, Lista 5

Konwersatorium 13.11.2017, Konwersatorium 20.11.2017 i Ćwiczenia 22.11.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Warstwy lewostronne i warstwy prawostronne podgrupy K grupy G. Własności warstw. Indeks podgrupy K w grupie G. Twierdzenie Lagrange'a i wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona. Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady. Twierdzenie Cayley'a. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Charakteryzacja monomorfizmu grup przy pomocy jądra.

1S. Opisać zbiór warstw lewostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H, dla:

(a) $G = \mathbb{Z}_{12},\ H = \{0, 6\}$;

(b) $G = S_3,\ H = \{\mathrm{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$;

(c) $G = \mathbb{Z},\ H = 5\mathbb{Z}$;

(d) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_\pi, O_{3\pi/2}\}$;

(e) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, S\}$, gdzie S jest dowolną symetrią osiową.

2K. Dla $n \in \mathbb{N}_{>0}$ udowodnić, że A_n (zbiór permutacji parzystych w S_n) jest podgrupą S_n i opisać warstwy A_n w S_n.

3K. Dla $n \in \mathbb{N}_{>1}$, niech

$$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \mathrm{NWD}(k, n) = 1\}.$$

Udowodnić, że:

(a) mnożenie modulo n (oznaczane $\cdot_n$) jest działaniem na $\mathbb{Z}_n^*$;

(b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą.

4S. Udowodnić, że:

(a) złożenie homomorfizmów jest homomorfimem;

(b) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

5S. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup $f : G \to H$? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.

(a) $G = (\mathbb{Z}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ f(1) = 7$.

(b) $G = (\mathbb{Z}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(2) = 7$ (czemu musi być wtedy równe $f(1)$?).

(c) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(1) = 1$ (czemu musi być wtedy równe $f(\frac{1}{2})$?).

(d) $G = H = (\mathbb{R}, +),\ f(1) = 99$.

(e) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ f(1) = 5$.

(f) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ f(1) = 2$.

(g) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_5, +_5),\ f(1) = 1$.

6K. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \leqslant S_G$.

7K. Załóżmy, że G, H są grupami oraz grupa G jest cykliczna, skończona i generowana przez element a. Załóżmy, że $b \in H$ oraz $\mathrm{ord}(b)$ dzieli $\mathrm{ord}(a)$. Udowodnic, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$.

8K. Załóżmy, że G jest grupą cykliczną, nieskończoną i generowaną przez element a, H jest dowolną grupą oraz $b \in H$. Udowodnić, że istnieje dokladnie jeden homomorfizm $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$.

9. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup $f : G \to H$? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.

   (a) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ f(1) = -1.$
   (b) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ f(1) = 2.$
   (c) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ f(2) = 1.$
   (d) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(1) = 1.$
   (e) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_2, +_2),\ f(1) = 1.$

10. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $f : G \to H$, gdzie:

   (a) $G = (\mathbb{Z}, +),\ H = (\mathbb{Z}_4, +_4);$
   (b) $G = (\mathbb{Z}_3, +_3),\ H = (\mathbb{Z}_4, +_4);$
   (c) $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10}),\ H = (\mathbb{Z}_6, +_6);$
   (d) $G = H = (\mathbb{Q}, +).$

11. Załóżmy, że $a, b \in G,\ a \neq e$ oraz $a^4 b = ba^5$. Udowodnić, że $ab \neq ba$.

12. Załóżmy, że G jest generowana przez zbiór $\{g, h\} \subseteq G$ taki, że $\mathrm{ord}(g) = 5,\ \mathrm{ord}(h) = 4$ oraz $gh = hg^2$.

   (a) Niech $K = \langle g \rangle,\ H = \langle h \rangle$. Udowodnić, że $K \cap H = \{e\}$.
   (b) Udowodnić, że każdy element grupy G jest postaci $g^i h^j$ dla pewnych $0 \leqslant i < 5$ oraz $0 \leqslant j < 4$ oraz, że to przedstawienie jest jednoznaczne. Ile elementów ma grupa G?
   (c) Napisać wzór na iloczyn elementów grupy G zapisanych w postaci $g^i h^j$ jak w podpunkcie (b) powyżej.

13. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:

$$r_{13}(125^{342}),\ r_{29}(321^{485}),\ r_{31}(321^{485}).$$