ALGEBRA 1, Lista 6

Konwersatorium 24.11.2017, Konwersatorium 27.11.2017 i Ćwiczenia 29.11.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Dzielnik normalny (podgrupa normalna). Grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup. Produkt grup: definicja, własności, przykłady. Twierdzenie o produkcie wewnętrznym podgrup grupy. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności.

1. Czy poniższe podgrupy $H \leqslant G$ są dzielnikami normalnymi?

   (a)S $H = \mathbb{Z},\ G = (\mathbb{R}, +)$.

   (b)S $H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_\pi, O_{3\pi/2}\},\ G = D_4$.

   (c)S $H = \{\mathrm{id}, S\},\ G = D_4$, gdzie S jest dowolną symetrią osiową z D_4.

   (d)S $H = \{\mathrm{id}, O_\pi\},\ G = D_4$.

   (e)K $H = \langle(1, 2, 3)\rangle,\ G = S_3$.

   (f)K $H = \langle(1, 2, 3)\rangle,\ G = S_4$.

2. W grupie ilorazowej G/H wyznaczyć rząd elementu $a + H$, gdzie:

   (a)K $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;

   (b)S $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (3\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;

   (c)S $G = (\mathbb{Z}_{12}, +_{12}),\ H = \{0, 3, 6, 9\},\ a = 5$;

   (d)K $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ a = \sqrt{2}$.

3K. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definiujemy:

$$kA := \{kx \mid x \in A\}$$

($kx = x + \ldots + x$, gdzie x dodajemy do siebie k razy). Udowodnić, że kA jest podgrupą A.

4K. Załóżmy, że $k|n$. Udowodnić, że:

   (a) istnieje jedyny homomorfizm $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n/k}$ taki, że $\varphi(1) = 1$;

   (b) dla homomorfizmu φ powyżej mamy

$$\ker(\varphi) = \langle n/k\rangle = (n/k)\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_k;$$

   (c) $\mathbb{Z}_n/\frac{n}{k}\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{n/k}$.

5S. Znaleźć $k \in \mathbb{N}_{>0}$, takie że:

   (a) $\mathbb{Z}_{12}/3\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$,

   (b) $\mathbb{Z}_8/6\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_k$,

   (c) $\mathbb{Z}_{12}/5\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$.

6. Czy następujące grupy są cykliczne?

   (a)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$;

   (b)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$;

   (c)S $(\mathbb{Q}, +)$;

   (d)K $(\mathbb{R}, +)$;

   (e)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$;

   (f)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}_2, +_2)$.

7. Rozważamy grupy G, H oraz dzielnik normalny $K \triangleleft G$. W każdym z poniższych przypadków udowodnić, że $G/K \cong H$ (wskazać epimorfizm $f : G \to H$ taki, że $\ker(f) = K$ i skorzystać z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie grup).

   (a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

   (b) $G = (\mathbb{R}^2, +),\ K = \mathrm{Lin}\{(1, 2)\},\ H = (\mathbb{R}, +)$.

   (c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1, i, -i\},\ H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

   (d) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

   (e) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +),\ K = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\},\ H = (\mathbb{Z}, +)$.

8. Niech G będzie grupą cykliczną i H dzielnikiem normalnym w G. Udowodnić, że grupa G/H jest cykliczna.

9. Mamy funkcję
$$f : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = 4x - 2y,$$
   która jest epimorfizmem grup (a nawet przestrzeni liniowych).

   (a) Znaleźć $\ker(f)$.

   (b) Wskazać podgrupę $H < (\mathbb{R}^2, +)$ taką, że $(\mathbb{R}^2, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\ker(f)$ i H (w szczególności: $(\mathbb{R}^2, +) \cong \ker(f) \times H$).

10. Czy istnieje $H < (\mathbb{Q}, +)$ taka, że $(\mathbb{Q}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\mathbb{Z}$ i H?

11. Czy istnieje $H < (\mathbb{Z}, +)$ taka, że $(\mathbb{Z}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $3\mathbb{Z}$ i H?

12. Czy grupa S_3 jest izomorficzna z produktem $G \times H$ dla pewnych nietrywialnych grup G i H?

13. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:

    (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$;

    (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$;

    (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.