ALGEBRA 1, Lista 7

Konwersatorium 4.12.2017 i Ćwiczenia 6.12.2017.

0S. Grupa kwaternionów Q_8 i klasyfikacja grup rzędu co najwyżej 8. Automorfizmy wewnętrzne grup. Centrum grupy $Z(G)$: definicja, własności i przykłady. Grupa $\mathrm{Inn}(G)$ automorfizmów wewnętrznych grupy G, związek z centrum grupy $Z(G)$. Relacja sprzężenia w grupie G. Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1S. Grupa przekształceń afinicznych prostej to poniższy zbiór funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$A = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

(a) Udowodnić, że A jest grupą względem złożenia funkcji (podgrupą $S_{\mathbb{R}}$).

(b) Niech

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Udowodnić, że H jest podgrupą $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(c) Udowodnić, że $A \cong H$.

2S. Znaleźć nietrywialne podgrupy $A, B < \mathbb{Z}_{15}$ takie, że funkcja

$$f : A \times B \to \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a, b) = a +_{15} b$$

jest izomorfizmem.

3K. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

4K. Czy istnieje monomorfizm grup $f : G \to H$? Jesli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz. (wskazówka: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa $S \leqslant H$ taka, że $S \cong G$).

(a) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{24}$,

(b) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}$,

(c) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{100}$,

(d) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = S_8$,

(e) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +)$

(f) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +)$,

(g) $G = S_3,\ H = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$,

(h) $G = D_4,\ H = S_8$.

5. Czy istnieją podgrupy właściwe K, H grupy kwaternionów Q_8 takie, że Q_8 jest produktem wewnętrznym K i H?

6. Udowodnić, że każda podgrupa grupy kwaternionów Q_8 jest jej dzielnikiem normalnym.

7. Udowodnić, że

$$Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

8. Niech $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) \in S_5$.

(a) Wypisać wszystkie permutacje τ w grupie S_5, które są sprzężone z permutacją σ. Za każdym razem wskazać permutację f taką, że $\tau = \varphi_f(\sigma)$ (przypomnienie: $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$).

(b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w S_5, które są przemienne z permutacją σ (wskazówka: τ jest przemienna z $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$).

(c) Udowodnić, że zbiór z punktu (b) jest podgrupą grupy S_5.

9. W dowolnej grupie G udowodnić, że dla danego $a \in G$ zbiór

$$C(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$$

jest podgrupą grupy G (zwaną *centralizatorem* elementu a w grupie G).

10. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Udowodnić, że:

(a) jeśli $A \leqslant G$, to $f(A) \leqslant H$;

(b) jeśli $B \leqslant H$, to $f^{-1}(B) \leqslant G$.

11. Załóżmy, że grupa G ma jedyną podgrupę H rzędu 25. Udowodnić, że $H \trianglelefteqslant G$. (wskazówka: dla $g \in G$, rozważyć podgrupę $\varphi_g(H) \leqslant G$).

12. W następujących grupach G opisać klasy sprzężenia:

(a) $G = Q_8$;

(b) $G = D_3$;

(c) $G = D_4$.