

## ALGEBRA 1, Lista 8

Konwersatorium 11.12.2017. Lista 8 nie obowiązuje na Kolokwium 2 (13.12.2017).

1S. Sprawdzić, czy poniższe  $(A, \oplus, \odot)$  są pierścieniami:

- (a)  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $a \oplus b = a + b$ ,  $a \odot b = ab$  (dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych);
- (b)  $A = \mathbb{R}$ ,  $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ ,  $a \odot b = a \cdot b$ ;
- (c)  $A = \mathbb{R}_{>0}$ ,  $a \oplus b = a \cdot b$ ,  $a \odot b = a^b$ .

2S. Niech  $R$  będzie pierścieniem  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ .

- (a) Napisać tabelki działań w pierścieniu  $R$ .
- (b) Wskazać dzielniki zera i elementy odwracalne w pierścieniu  $R$ .

3K. Niech  $A$  będzie dowolnym zbiorem,  $\mathcal{P}(A)$  oznacza zbiór wszystkich podzbiorów  $A$  oraz dla  $X, Y \in \mathcal{P}(A)$  definiujemy ich *różnicę symetryczną*:

$$X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Udowodnić, że  $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cap)$  jest pierścieniem.

4K. Które z poniższych pierścieni są dziedzinami, a które ponadto są ciałami?

- (a)  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  (z działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych).
- (b)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
- (c)  $\mathbb{Z}_4$ .
- (d)  $\mathbb{Z}_5$ .
- (e)  $\mathbb{Z}_6$ .
- (f)  $(\mathcal{P}(\{0\}), \Delta, \cap)$ .
- (g)  $(\mathcal{P}(\{0, 1\}), \Delta, \cap)$ .
- (h)  $\mathbb{Z}[i]$ .
- (i)  $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  (z działaniami dodawania i mnożenia liczb zespolonych).
- (j)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ .