ALGEBRA 1, Lista 9

Konwersatorium 18.12.2017 i Ćwiczenia 20.12.2017.

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień (przemienny, z jedynką), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina, ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Wyliczenie, które pierścienie $\mathbb{Z}_n$ są ciałami. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady. Produkt pierścieni. Izomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, gdy m i n są względnie pierwsze. Funkcja i twierdzenie Eulera. Pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności (stopień wielomianu, R: dziedzina $\Rightarrow$ $R[X]$: dziedzina). Wielomiany a funkcje wielomianowe. Homomorfizm ewaluacji w punkcie.

1S. Załóżmy, że A i B są podpierścieniami pierścienia R. Udowodnić, że $A \cap B$ jest podpierścieniem pierścienia R.

2S. Określić działania $\oplus$ i $\odot$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ tak, by $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ był pierścieniem i funkcja

$$f : (\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad f(x) = x + 1$$

była izomorfizmem. Wskazać jedynkę i zero pierścienia $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

3S. Znaleźć cztery różne wielomiany w $\mathbb{Z}_5[X]$, które wyznaczają te same funkcje wielomianowe.

4K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $f : R \to S$ pierścieni z jedynką R i S (uwaga: zgodnie z definicją, $f(1_R) = 1_S$), dla:

(a) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}_6$;

(b) $R = \mathbb{Z}_{15},\ S = \mathbb{Z}_3$;

(c) $R = \mathbb{Z}_7,\ S = \mathbb{Z}_4$;

(d) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}$;

(e) $R = \mathbb{Q},\ S = \mathbb{Q}$.

5K. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w następujących pierścieniach:

(a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$;

(b) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$;

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;

(d) $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cap)$, gdzie A jest ustalonym zbiorem.

6. Niech $+, \cdot$ będą działaniami określonymi w zbiorze A. Wiadomo, że $(A, +)$ jest grupą, zaś działanie $\cdot$ jest łączne, rozdzielne względem $+$ i ma element neutralny $1 \in A$. Wykazać, że wtedy $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem. (Wskazówka: wystarczy udowodnić przemienność $+$. W tym celu wymnożyć na dwa sposoby $(1 + 1)(a + b)$ i porównać wyniki.)

7. Załóżmy, że $(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem, w którym grupa addytywna $(R, +)$ jest cykliczna. Udowodnić, że R jest przemienny.

8. Załóżmy, że w pierścieniu R mamy $a^2 = a$ dla wszystkich $a \in R$.

(a) Udowodnić, że $a + a = 0$ dla wszystkich $a \in R$ (wskazówka: rozważyć $(a + a)^2$).

(b) Udowodnić, że R jest przemienny (wskazówka: rozważyć $(a + b)^2$).

9. Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ (wskazówka: $f(1) = 1$).

10. Niech $C(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniami

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(a) Czy funkcja $f(x) = x$ jest odwracalna w pierścieniu $C(\mathbb{R})$? Czy jest dzielnikiem zera?

(b) Podać przykład funkcji odwracalnej w $C(\mathbb{R})$, różnej od funkcji stale równej jeden (jedynki pierścienia $C(\mathbb{R})$).

(c) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są odwracalne?

(d) Podać przykład funkcji w $C(\mathbb{R})$, która jest dzielnikiem zera w $C(\mathbb{R})$.

(e) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są dzielnikami zera?

11. Pokazać, że

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

jest podpierścieniem pierścienia $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, izomorficznym z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.