

ALGEBRA 1, Lista 1

Konwersatorium 8.10.2018 i Ćwiczenia 9.10.2018.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium. Na Kartkówce 1 (16.10.2018) obowiązują zadania z bieżącej listy.

- 0S Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Definicja grupy i pierwsze przykłady grup. Transport działania poprzez bijekcję.
- 1S Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 2 Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.
- (a)S $A = \mathbb{N}_+$; $m * n = \text{NWD}(m, n)$.
 - (b)S $A = \mathbb{N}_+$; $m * n = \text{NWW}(m, n)$.
 - (c)S $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{mn}$.
 - (d)S $A = \mathbb{N}$; $m * n = m2^n$.
 - (e)S $A = \mathbb{R}$; $m * n = (m + n)^2$.
 - (f)K $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.
 - (g)K $A = \mathbb{N}_+$; $m * n = m^n$.
 - (h)K $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.
- 3K Niech $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i rozważmy bijekcję $f : A \rightarrow A$ o następujących wartościach:
- $$f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 4.$$
- Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f , zaś \circ działaniem indukowanym w zbiorze A przez działanie \cdot_6 poprzez funkcję f . Sporządzić tabelki tych działań.
- 4K Przypomnieć sobie, co to jest postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej oraz definicje dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.
- (a) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r .
 - (b) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r ?
- 5 Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.
- (a) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.
 - (b) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{a}{b}$.

- (c) $A = \mathbb{R}; x * y = x + y + 2$.
- (d) $A = \mathbb{N}; m * n = m + 2^n$.
- (e) $A = \mathbb{N}; m * n = \min(m, n)$.
- (f) $A = \mathbb{N}; m * n = \max(m, n)$.
- (g) $A = \mathbb{N}; m * n = m$.
- (h) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q .
- (i) A to płaszczyzna; $P * Q$ to obraz punktu P w symetrii środkowej względem punktu Q .
- 6 Załóżmy, że $f : A \rightarrow B$ jest bijekcją, \circ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie \circ poprzez funkcję f . Udowodnić, że:
- (a) jeśli \circ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);
- (b) jeśli \circ ma element neutralny w A , to $*$ ma element neutralny w B ;
- (c) jeśli (A, \circ) jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.
- 7 Załóżmy, że \circ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A . Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.

Wskazówka

Dla $x \in A$ oraz $l > 0$ niech x^l oznacza $\underbrace{x \circ \dots \circ x}_{l \text{ razy}}$.

- (a) Zauważyć, że dla każdego $k, l > 0$ oraz $x \in A$ mamy:

$$(x^k)^l = x^{kl}, \quad x^k x^l = x^{k+l}.$$

- (b) Dla $c \in A$ rozważać elementy c^{2^k} , gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ i znaleźć $b \in A$ oraz $l \geq 2$ takie, że $b^l = b$.
- (c) Udowodnić, że jeśli b i l są jak w (b) powyżej, to dla $a := b^{l-1}$ mamy $a \circ a = a$.

- 8 Podać przykład działania $*$ na zbiorze $\{0, 1\}$ takiego, że

$$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$

Ile istnieje takich działań?