ALGEBRA 1, Lista 10

Konwersatorium 17.12.2018 i Ćwiczenia 18.12.2018.

0S. Materiał teoretyczny: Pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności (stopień wielomianu, R: dziedzina $\Rightarrow R[X]$: dziedzina). Wielomiany a funkcje wielomianowe. Homomorfizm ewaluacji w punkcie. Podpierścienie. Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności. Przykłady: $\mathbb{Q}$ jako ciało ułamków $\mathbb{Z}$ i ciało funkcji wymiernych. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe.

1S. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:

(a) $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;

(b) $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;

(c) $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2K. Udowodnić, że:

(a) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;

(b) ciało $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;

(c) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

3K. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:

(a) $3X^4 + 4X^3 - X^2 + 5X - 1$ przez $2X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;

(b) $X^7 + X^6 + X^4 + X + 1$ przez $X^3 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$;

(c) $20 + 8i$ przez $7 - 2i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

4. Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ (wskazówka: $\varphi(1) = 1$).

5. Pokazać, że

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

jest podpierścieniem pierścienia $M_2(\mathbb{R})$, izomorficznym z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

6. Czy funkcja

$$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$

jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

7. Czy funkcja

$$\delta : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad \delta(n + m\sqrt{2}) = |n^2 - 2m^2|$$

jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

8. Niech K będzie ciałem. Udowodnić, że w pierścieniu euklidesowym $K[X]$ (normą euklidesową jest stopień wielomianu) iloraz i reszta w dzieleniu z resztą są wyznaczone jednoznacznie.

9. Podać przykład $f, g \in \mathbb{Z}_4[X] \setminus \{0\}$ takich, że:

$$\deg(fg) < \deg(f) + \deg(g).$$