**ALGEBRA 1, Lista 12**

Konwersatorium 14.01.2019. Lista 12 nie obowiązuje na Kolokwium 3 (15.01.2019).

0S. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Opis elementów nierozkładalnych pierścienia $\mathbb{C}[X]$ oraz pierścienia $\mathbb{R}[X]$. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu. Lemat Gaussa i Kryterium Eisensteina. Chińskie twierdzenie o resztach (klasyczne).

1S. Udowodnić, że następujące liczby rzeczywiste są niewymierne, odwołując się do twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.
*Rozwiązanie*
Np. $\sqrt[5]{25}$ jest niewymierna, ponieważ jest pierwiastkiem wielomianu $X^5 - 25$, czyli z tw. o pierwiastkach wymiernych wielomianu jedyne możliwe pierwiastki wymierne tego wielomianu to: $\pm 1, \pm 5, \pm 25$ i łatwo sprawdzić, że żadna z tych liczb pierwiastkiem wielomianu $X^5 - 25$ nie jest.

2S. Rozwiązać w $\mathbb{Z}$ następujący układ kongruencji:

$$x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 7),$$

$$x \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6).$$

3S. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{Q}$ i $a + b\sqrt{c}$ jest niewymiernym pierwiastkiem wielomianu $W \in \mathbb{Q}[X]$. Udowodnić, że $a - b\sqrt{c}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu oraz, że wielomian

$$X^2 - 2aX + (a^2 - b^2c)$$

dzieli wielomian $W$ w pierścieniu $\mathbb{Q}[X]$.

4K. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:

(a) $X^5 - 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
(b) $X^5 + 1$ w $\mathbb{Z}_2[X]$;
(c) $X^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
(d) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$.

5K. (a) Załóżmy, że wielomiany $W, V \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ są *względnie pierwsze*, tzn. 1 jest największym wspólnym dzielnikiem $W$ i $V$. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S, T \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:

$$\frac{1}{WV} = \frac{S}{W} + \frac{T}{V}.$$

(b) Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $T \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V}{W}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz $W$ jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia $\leqslant 2$ (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne!).

6K. Załóżmy, że $R$ jest dziedziną oraz $a, b \in R \setminus \{0\}$.

(a) Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$ takie, że $aq = b$. Wtedy $q$ nazywamy *ilorazem* $b$ przez $a$ i oznaczamy $\frac{b}{a}$.

(b) Załóżmy, że $d \in R$ jest *wspólnym dzielnikiem* $a$ i $b$, tzn. $d|a$ i $d|b$. Udowodnić, że $\frac{ab}{d} \in R$ jest *wspólną wielokrotnością* $a$ i $b$, tzn. $a|\frac{ab}{d}$ i $b|\frac{ab}{d}$.