ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 21.01.2019 i Ćwiczenia 22.01.2019 (bez kartkówki).

0S. Materiał teoretyczny: Ideał w pierścieniu R. Ideał główny. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy. Jądro i obraz homomorfizmu pierścieni przemiennych z jedynką oraz zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie pierścieni. Opis pierścienia ilorazowego $K[X]/(W)$ (K jest ciałem), postać normalna elementów tego pierścienia oraz implikacja: jeśli W jest nierozkładalny, to pierścień $K[X]/(W)$ jest ciałem.

1S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.

(a) $\mathbb{Z}_6/(3)$.

(b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3/((1,2))$.

2. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych i podać wyniki w postaci normalnej. Które z tych pierścieni ilorazowych są ciałami?

(a)S $3X + 4 + I$ i $5X - 2 + I$ w $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 7)$.

(b)S $X^2 + 3X + 1 + I$ i $-2X^2 + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.

(c)K $X^2 + 1 + I$ i $X + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.

3K. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wskazówka: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni.

(a) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 5) \cong \mathbb{C}$.

(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(c) $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$.

(d) $\mathbb{R}[X,Y]/(X + Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.

4. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:

(a) $X^4 - 9X + 3$ w $\mathbb{Q}[X]$;

(b) $X^3 - 4X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;

(c) $X^8 - 16$ w $\mathbb{C}[X]$;

(d) $X^8 - 16$ w $\mathbb{R}[X]$;

(e) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Q}[X]$;

(f) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

5. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu?

(a) $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(b) $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(c) $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(d) $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$.

(e) $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$.

(f) $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$.

6. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach.
Wskazówka: obliczyć wartość wyznacznika modulo 10 *i modulo* 11.

7. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

   (a) $(2) \cap (3)$ w $\mathbb{Z}$;

   (b) $(12) \cap (18)$ w $\mathbb{Z}$;

   (c) $(X^2 - 1) \cap (X + 1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.

   Zauważyć ogólną prawidłowość.

8. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

   (a) $(2, 3)$ w $\mathbb{Z}$;

   (b) $(9, 12)$ w $\mathbb{Z}$;

   (c) $(X^2 + X + 1, X^2 + 1)$ w $\mathbb{Z}_2[X]$.

   Zauważyć ogólną prawidłowość.