ALGEBRA 1, Lista 3

Konwersatorium 22.10.2018 i Ćwiczenia 23.10.2018.

0S. Materiał teoretyczny: rząd elementu grupy, podgrupa generowana przez podzbiór lub element grupy. Grupa cykliczna: definicja i klasyfikacja z dokładnością do izomorfizmu. Mnożenie permutacji w postaci dwuwierszowej i w postaci iloczynu cykli. Permutacja odwrotna. Rozkład permutacji na cykle rozłączne. Inwersja w permutacji i transpozycja. Permutacje parzyste i nieparzyste. Znak permutacji.

1S. Dana jest grupa G.

(a) Załóżmy, że $a \in G$ i $aa = a$. Udowodnić, że $a = e$.

(b) Załóżmy, że $a, b \in G$ i $ab = e$. Dowieść, że wtedy $ba = e$ (więc $b = a^{-1}$).

2S. Niech $k \in \mathbb{N}_+$ i $k\mathbb{Z} = \{kn : n \in \mathbb{Z}\}$. Udowodnić, że:

(a) zbiór $k\mathbb{Z}$ jest podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$;

(b) $(k\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

3S. Rozłożyć permutację $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ na iloczyn cykli rozłącznych. Jaki jest znak tej permutacji? Zapisać permutację σ^{-1} w postaci tabularycznej i jako iloczyn cykli rozłącznych.

4K. Załóżmy, że $f : G \to H$ jest izomorfizmem grup, $g \in G$ i $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że:

(1) $\mathrm{ord}_G(g) = \mathrm{ord}_H(f(g))$;

(2) jeśli $\mathrm{ord}_G(g) = k$ jest skończony, to $g^n = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k|n$.

5K. Wyznaczyć rzędy następujących permutacji z S_n, gdzie $n \geqslant 7$:

(1) $(1, 2)(4, 5, 6, 7)$;

(2) $(1, 2, 3)(4, 5)$;

(3) $\sigma \circ \tau$, gdzie σ to cykl długości k, τ to cykl długości l oraz cykle te są rozłączne.

6K. Piętnastka to następująca układanka: w ramce z miejscami na 16 kostek umieszczone jest 15 kostek z liczbami od 1 do 15, jedno miejsce pozostaje wolne. W pojedynczym ruchu można przesuwać poziomo lub pionowo kostkę na wolne miejsce, z miejsca sąsiedniego. Udowodnić, że w ten sposób z układu:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

nie można w żadnej liczbie ruchów przejść do układu:

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

7. Załóżmy, że H jest nietrywialną podgrupą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ (tzn. $H \neq \{0\}$).

(a) Udowodnić, że istnieje liczba dodatnia, która należy do H.

(b) Niech k będzie najmniejszą liczbą dodatnią należącą do H. Udowodnić najpierw, że $k\mathbb{Z} \subseteq H$ i następnie udowodnić, że $k\mathbb{Z} = H$.

Wywnioskować stąd, że każda podgrupa grupy $(\mathbb{Z}, +)$ jest postaci $k\mathbb{Z}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}_+$.

8. Załóżmy, że grupa G jest skończona. Udowodnić, że G jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $a \in G$ taki, że $\mathrm{ord}(a) = |G|$.

9. Udowodnić, że każda podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

10. Doskonałe tasowanie zbioru $2n$ kart do gry to permutacja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

Jaka jest najmniejsza liczba doskonałych tasowań 52 kart, po której karty są w wyjściowym układzie? Jaka jest ta liczba dla 50 kart?

11. Dla wielomianu $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ i permutacji $\sigma \in S_4$ definiujemy wielomian $W^\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ wzorem:

$$W^\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = W\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}\right).$$

Niech $G_W = \{\sigma \in S_4 : W = W^\sigma\}$ (G_W jest zawsze pewną podgrupą S_4). Wyznaczyć G_W dla następujących wielomianów:

(a) $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$;

(b) $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$;

(c) $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$.