ALGEBRA 1, Lista 10

Ćwiczenia 10.12.2019, Konwersatorium 11.12.2019 i materiał na Kartkówkę 8 (17.12.2019).

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień (przemienny, z jedynką), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina, ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Wyliczenie, które pierścienie $\mathbb{Z}_n$ są ciałami. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady. Produkt pierścieni. Izomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, gdy m i n są względnie pierwsze. Funkcja i twierdzenie Eulera.

1K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $f : R \to S$ pierścieni z jedynką R i S (uwaga: zgodnie z definicją, $f(1_R) = 1_S$), dla:
   (a) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}_6$;
   (b) $R = \mathbb{Z}_{15},\ S = \mathbb{Z}_3$;
   (c) $R = \mathbb{Z}_7,\ S = \mathbb{Z}_4$;
   (d) $R = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z}$;
   (e) $R = \mathbb{Q},\ S = \mathbb{Q}$;
   (f) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = S$;
   (g) $R = \mathbb{R} = S$.

2. Znaleźć wszystkie dzielniki zera i wszystkie elementy odwracalne w następujących pierścieniach:
   (a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$;
   (b) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$;
   (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;

3. Niech $+, \cdot$ będą działaniami określonymi w zbiorze A. Wiadomo, że $(A, +)$ jest grupą, zaś działanie $\cdot$ jest łączne, rozdzielne względem $+$ i ma element neutralny $1 \in A$. Wykazać, że wtedy $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem.
   Wskazówka: wystarczy udowodnić przemienność $+$. W tym celu wymnożyć na dwa sposoby $(1 + 1)(a + b)$ i porównać wyniki.

4. Załóżmy, że $(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem, w którym grupa addytywna $(R, +)$ jest cykliczna. Udowodnić, że R jest przemienny.

5. Załóżmy, że w pierścieniu R mamy $a^2 = a$ dla wszystkich $a \in R$.
   (a) Udowodnić, że $a + a = 0$ dla wszystkich $a \in R$ (wskazówka: rozważyć $(a + a)^2$).
   (b) Udowodnić, że R jest przemienny (wskazówka: rozważyć $(a + b)^2$).

6. Niech $C(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniami

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

   (a) Czy funkcja $f(x) = x$ jest odwracalna w pierścieniu $C(\mathbb{R})$? Czy jest dzielnikiem zera?
   (b) Podać przykład funkcji odwracalnej w $C(\mathbb{R})$, różnej od funkcji stale równej jeden (jedynki pierścienia $C(\mathbb{R})$).
   (c) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są odwracalne?
   (d) Podać przykład funkcji w $C(\mathbb{R})$, która jest dzielnikiem zera w $C(\mathbb{R})$.
   (e) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są dzielnikami zera?