

ALGEBRA 1, Lista 11

Ćwiczenia 17.12.2019, Konwersatorium 18.12.2019 i materiał na Kartkówkę 9 (14.01.2020).

- 0S. Materiał teoretyczny: Pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności (stopień wielomianu, R : dziedzina $\Rightarrow R[X]$: dziedzina). Wielomiany a funkcje wielomianowe. Homomorfizm ewaluacji w punkcie. Podpierścienie. Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności. Przykłady: \mathbb{Q} jako ciało ułamków \mathbb{Z} i ciało funkcji wymiernych. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja.
- 1K. Znaleźć wszystkie podpierścienie z 1 pierścienia $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- 2K. Czy następujące podzbiory $\mathbb{Z}[X]$ są podpierścieniami (z 1?) $\mathbb{Z}[X]$?
- (a) Zbiór wielomianów, których wyraz wolny jest podzielny przez 7.
 - (b) Zbiór wielomianów, których suma współczynników jest równa 0.
 - (c) $\{h \in \mathbb{Z}[X] \mid 5 \text{ dzieli } h(5)\}$.
 - (d) Zbiór wielomianów, w których współczynnik przy X jest równy 0.
 - (e) Zbiór wielomianów, w których współczynniki przy nieparzystych potęgach X są równe 0.
 - (f) $\{2f + (X^2 + 1)g \in \mathbb{Z}[X] \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$.
 - (g) $\{Xf + (X^2 + 1)g \in \mathbb{Z}[X] \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$.
3. Udowodnić, że:
- (a) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;
 - (b) ciało $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
 - (c) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.
4. Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $\varphi : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ (wskazówka: $\varphi(1) = 1$).
5. Pokazać, że

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

jest podpierścieniem pierścienia $M_2(\mathbb{R})$, który jest izomorficzny z ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} .

6. Niech $k \in \mathbb{Z}$ oraz

$$\mathbb{Z}_{(k)} := \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ oraz } k \nmid m \right\}.$$

Dla jakich liczb k zbiór $\mathbb{Z}_{(k)}$ jest podpierścieniem \mathbb{Q} ?

7. Czy funkcja

$$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$

jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

8. Podać przykład $f, g \in \mathbb{Z}_4[X] \setminus \{0\}$, takich że $fg \neq 0$ oraz:

$$\deg(fg) < \deg(f) + \deg(g).$$