ALGEBRA 1, Lista 12

Konwersatorium 8.01.2020 i Ćwiczenia 14.01.2020. Na Kolokwium 3 (21.01.2020) obowiązuje materiał z List 1 – 12.

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R. Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R. Twierdzenie Bézout(a). Podstawowe twierdzenie arytmetyki. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym.

1S. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:
(a) $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;
(b) $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
(c) $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2S. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
(a) $a = 33,\ b = 42,\ R = \mathbb{Z}$.
(b) $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1,\ b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2,\ R = \mathbb{Q}[X]$.
(c) $a = X^4 + 2,\ b = X^3 + 3,\ R = \mathbb{Z}_5[X]$.

3S. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
(a) $a = 5,\ b = -5,\ R = \mathbb{Z}$.
(b) $a = 2,\ b = 4,\ R = \mathbb{Z}$.
(c) $a = X + 1,\ b = 5X + 5,\ R = \mathbb{Q}[X]$.
(d) $a = X + 1,\ b = 5X + 6,\ R = \mathbb{Q}[X]$.
(e) $a = X + 1,\ b = 5X + 5,\ R = \mathbb{Z}[X]$.
(f) $a = 1 + i,\ b = 1 - i,\ R = \mathbb{Z}[i]$.
(g) $a = 1 + i,\ b = 2 + i,\ R = \mathbb{Z}[i]$.

4K. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
(a) 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.
(b) 11 w $\mathbb{Z}_{2020}$.
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
(e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.

5K. Które z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 1+i, 2+i, 3+i, 4+i, 5+i$ są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$?

6. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
(a) $a = 2891,\ b = 1589,\ R = \mathbb{Z}$.
(b) $a = X^4 + X + 1,\ b = X^3 + X^2 + X,\ R = \mathbb{Z}_3[X]$.
(c) $a = 4 - i,\ b = 1 + i,\ R = \mathbb{Z}[i]$.

7. Wskazać nierozkładalny wielomian:
   (a) stopnia 2 należący do $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (b) stopnia 3 należący do $\mathbb{Z}_7[X]$;
   (c) stopnia 4 należący do $\mathbb{Z}_2[X]$.
8. Załóżmy, że R jest dziedziną, $n \in \mathbb{N}$ i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n. Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R).
9. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3 + 5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.
10. Załóżmy, że R jest dziedziną, element $p \in R$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że element $q = up$ też jest nierozkładalny.
11. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.
    (a) Udowodnić, że $(X - a)|(X^{p-1} - 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.
    (b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1} - 1)/(X - a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $p = 5$ i $a = 2$.
    (c) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[X]$ zachodzi:
    $$X^{p-1} - 1 = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot \ldots \cdot (X - p + 1).$$