ALGEBRA 1, Lista 14

Ćwiczenia 28.01.2020 i Konwersatorium 29.01.2020.

0S. Materiał teoretyczny: Chińskie twierdzenie o resztach. Ideał w pierścieniu R. Ideał główny. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy. Jądro i obraz homomorfizmu pierścieni przemiennych z jedynką oraz zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie pierścieni. Opis pierścienia ilorazowego $K[X]/(W)$ (K jest ciałem), postać normalna elementów tego pierścienia oraz implikacja: jeśli W jest nierozkładalny, to pierścień $K[X]/(W)$ jest ciałem.

1S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.
   (a) $\mathbb{Z}_6/(3)$.
   (b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3/((1,2))$.

2K. Niech R będzie dziedziną i $a, b \in R$. Załóżmy, że a nie dzieli b oraz element a jest nierozkładalny. Udowodnić, że największy wspólnik dzielnik a i b to 1.

3K. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:
   (a) $X^4 - 9X + 3$ w $\mathbb{Q}[X]$;
   (b) $X^3 - 4X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
   (c) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Q}[X]$;
   (d) $X^8 - 16$ w $\mathbb{R}[X]$;
   (e) $X^8 - 16$ w $\mathbb{C}[X]$;
   (f) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

4K. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu?
   (a) $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
   (d) $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$.
   (e) $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$.
   (f) $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$.

5K. Rozważmy pierścień
$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
(podpierścień ciała liczb rzeczywistych) oraz funkcję
$$d : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{N}, \quad d\left(n + m\sqrt{2}\right) = \left|n^2 - 2m^2\right|.$$
   (a) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ przedstawienie x w postaci $n + m\sqrt{2}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) jest jednoznaczne.
   (b) Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy $d(xy) = d(x)d(y)$.
   (c) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy: $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 1$.
   (d) Wskazać nieskończenie wiele elementów $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$.
   (e) Znaleźć rozkład liczby 2 na iloczyn czynników nierozkładalnych w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

6. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych i podać wyniki w postaci normalnej. Które z tych pierścieni ilorazowych są ciałami?
   (a) $3X + 4 + I$ i $5X - 2 + I$ w $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 7)$.
   (b) $X^2 + 3X + 1 + I$ i $-2X^2 + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.
   (c) $X^2 + 1 + I$ i $X + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.

7. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wskazówka: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni.
   (a) $\mathbb{R}[X]/(X^2+5) \cong \mathbb{C}$.
   (b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   (c) $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$.
   (d) $\mathbb{R}[X,Y]/(X+Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.
8. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach.
   Wskazówka: obliczyć wartość wyznacznika modulo 10 *i modulo* 11.
9. Załóżmy, że I, J są ideałami w pierścieniu R. Udowodnić, że $I \cap J$ oraz
$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$
   też są ideałami w R. Podać przykład, gdzie $I \cup J$ nie jest ideałem w R.
10. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:
    (a) $(2) \cap (3)$ w $\mathbb{Z}$;
    (b) $(12) \cap (18)$ w $\mathbb{Z}$;
    (c) $(X^2-1) \cap (X+1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.
    Zauważyć ogólną prawidłowość.
11. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:
    (a) $(2,3)$ w $\mathbb{Z}$;
    (b) $(9,12)$ w $\mathbb{Z}$;
    (c) (X^2+X+1, X^2+1) w $\mathbb{Z}_2[X]$.
    Zauważyć ogólną prawidłowość.