ALGEBRA 1, Lista 15

Ćwiczenia 4.02.2020.

0S. Materiał teoretyczny: Ideały maksymalne i związek pomiędzy ideałami maksymalnymi i ciałami. Charakterystyka ciała i podciało. Równania algebraiczne w ciele F, znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu K ciała F. Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie) i nieskończoność. Ciała proste. Podciało proste ciała F. Liczba elementów ciała skończonego. Funkcja Frobeniusa w ciele charakterystyki $p > 0$.

1S. Sporządzić tabelki działań ciała:
  (a) 4-elementowego,
  (b) 9-elementowego.

2S. Które z podanych pierścieni są ciałami?
  (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
  (b) $\mathbb{Z}_4$.
  (c) $\mathbb{Z}_{17}$.
  (d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$.
  (e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.
  (f) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$.
  (g) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$.
  (h) $M_n(\mathbb{R}),\ n > 1$.

3. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + x + 1 = 0$
  (a) w ciele $\mathbb{Z}_7$;
  (b) w ciele $\mathbb{Z}_5$;
  (c) w ciele liczb rzeczywistych;
  (d) w ciele liczb zespolonych.

4. Traktujemy ciało $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$.
  (a) Udowodnić, że zbiór $\{1, \sqrt{2}\}$ jest bazą tej przestrzeni liniowej.
  (b) Mamy funkcję

$$f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \qquad f(x) = \left(1 + \sqrt{2}\right) x.$$

  Sprawdzić, że f jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ nad ciałem $\mathbb{Q}$, a następnie obliczyć macierz przekształcenia liniowego f w bazie $\{1, \sqrt{2}\}$.

5. Traktujemy ciało $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że wymiar tej przestrzeni liniowej jest nieskończony (dla zainteresowanych: wymiar ten jest nieprzeliczalny i równy $2^{\aleph_0}$).

6. Załóżmy, że F jest ciałem oraz $I \trianglelefteq F$. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.

7. Załóżmy, że $f : F_1 \to F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest monomorfizmem.

8. Załóżmy, że R jest niezerowym pierścieniem przemiennym z 1 oraz ideał $I \lhd R$ jest taki, że $I \neq R$. Mówimy, że ideał I jest *pierwszy*, gdy dla wszystkich $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$ pociąga, że $a \in I$ lub $b \in I$. Udowodnić, że:
  (a) ideał I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień R/I jest dziedziną;
  (b) jeśli I jest maksymalny, to I jest pierwszy.

9. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}[X]$ oraz $W(z) = 0$. Udowodnić, że:
  (a) wielomian

$$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) = (X - z)(X - \bar{z})$$

  dzieli W w pierścieniu $\mathbb{R}[X]$;
  (b) $W(\bar{z}) = 0$.

Wskazówka: podzielić z resztą.