ALGEBRA 1, Lista 2

Konwersatorium 9.10.2019 i Ćwiczenia 15.10.2019.

0S. Materiał teoretyczny: Działania dodawania i mnożenia modulo n. Pojęcie podgrupy, homomorfizmu grup i izomorfizmu grup. Notacja multyplikatywna i addytywna. Grupy permutacji i grupy macierzy. Grupy izometrii własnych prostokąta i trójkąta równobocznego, grupa czwórkowa Kleina K_4. Izomorfizm grupy izometrii własnych trójkąta równobocznego i S_3.

1S. Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze reszt modulo 6, to znaczy w zbiorze $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2S. Rozważmy bijekcję $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ o następujących wartościach:

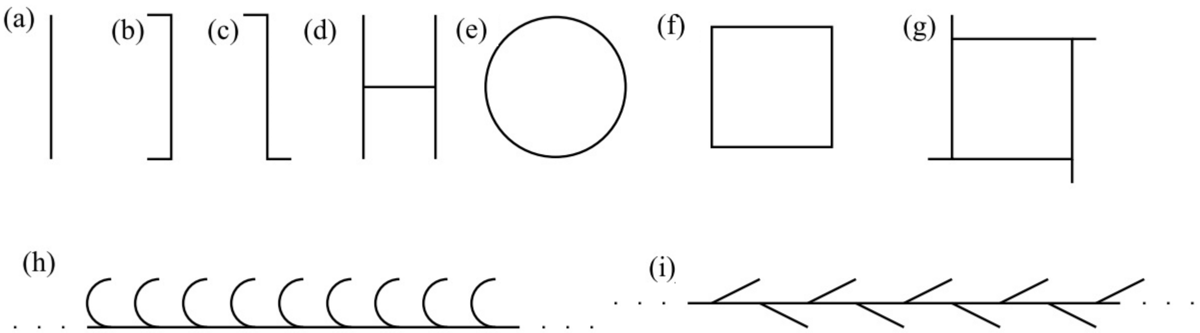
$$f(0) = 3, \ f(1) = 5, \ f(2) = 0, \ f(3) = 1, \ f(4) = 2, \ f(5) = 4.$$

Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze $\mathbb{Z}_6$ przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f, zaś $\circ$ działaniem indukowanym w zbiorze $\mathbb{Z}_6$ przez działanie $\cdot_6$ poprzez funkcję f. Sporządzić tabelki działań $*$ i $\circ$.

3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i $A \subseteq G$. Dla poniższych $(G, \cdot)$ i A sprawdzić, czy podzbiór A jest zamknięty na działanie $\cdot$. Jeśli tak, to sprawdzić czy A jest podgrupą grupy $(G, \cdot)$.
(a)S $G = (\mathbb{C}, +)$; $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (okrąg).
(b)S $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = (0, \infty)$ (dodatnie liczby rzeczywiste).
(c)S $G = S_3$; $A = \left\{ \mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
(d)K $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$; $A = \{0, 2, 4, 6\}$.
(e)K $G = (\mathbb{Z}, +)$; $A = \mathbb{Z}_7$.
(f)K $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (n-te pierwiastki z 1).

4K. Niech G będzie grupą. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g, h \in G$ udowodnić, że:
(a) $g^k g^l = g^{k+l}$;
(b) $(g^k)^l = g^{kl}$;
(c) jeśli $gh = hg$, to $(gh)^k = g^k h^k$.

5. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur płaskich. Które z tych grup są ze sobą izomorficzne? Które z tych grup są abelowe?



6. Dowieść, że w dowolnej grupie G dla dowolnych $a, b \in G$ mamy:
   (a) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
   (b) $(a^{-1}ba)^k = a^{-1}b^k a$, gdzie k to dowolna liczba całkowita.
7. Załóżmy, że w grupie G mamy $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.
8. Udowodnić, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $(ab)^2 = a^2b^2$ dla wszystkich $a, b \in G$.
9. Wskazać 6 różnych izomorfizmów między grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego i grupą permutacji S_3.