

## ALGEBRA 1, Lista 7

Ćwiczenia 19.11.2019, Konwersatorium 20.11.2019 i materiał na Kartkówkę 6 (26.11.2019).

- 0S. Materiał teoretyczny: Grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup. Produkt grup: definicja, własności, przykłady. Twierdzenie o produkcie wewnętrznym podgrup grupy.
- 1S. Niech  $(A, +)$  będzie grupą przemianową i  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Definiujemy:

$$kA := \{kx \mid x \in A\}$$

( $x$  dodajemy do siebie  $k$  razy). Udowodnić, że  $kA$  jest dzielnikiem normalnym  $A$ .

- 2S. Znaleźć  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  takie, że:

- (a)  $\mathbb{Z}_{12}/3\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$ ;
- (b)  $\mathbb{Z}_8/6\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_k$ ;
- (c)  $\mathbb{Z}_{12}/5\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$ .

3. Czy następujące grupy są cykliczne?

- (a)  $S(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$ ;
- (b)  $S(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ;
- (c)  $K(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ ;
- (d)  $K(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ .

- 4K. Załóżmy, że  $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$  oraz  $k|n$ . Udowodnić, że:

- (a) istnieje jedyny homomorfizm  $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_k$ , taki że  $\varphi(1) = 1$ ;
- (b) dla homomorfizmu  $\varphi$  z punktu (a) powyżej mamy:

$$\ker(\varphi) = \langle k \rangle = k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{k}};$$

- (c)  $\mathbb{Z}_n/k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_k$ .

5. W grupie ilorazowej  $G/H$  wyznaczyć rząd elementu  $a + H$ , gdzie:

- (a)  $G = (\mathbb{Q}, +)$ ,  $H = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $a = \frac{2}{3}$ ;
- (b)  $G = (\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ ,  $H = \{0, 3, 6, 9\}$ ,  $a = 5$ ;
- (c)  $G = (\mathbb{Q}, +)$ ,  $H = (3\mathbb{Z}, +)$ ,  $a = \frac{2}{3}$ ;
- (d)  $G = (\mathbb{R}, +)$ ,  $H = (\mathbb{Q}, +)$ ,  $a = \sqrt{2}$ .

6. Rozważamy grupy  $G, H$  oraz dzielnik normalny  $K \triangleleft G$ . W każdym z poniższych przypadków udowodnić, że  $G/K \cong H$  (wskazać epimorfizm  $f : G \rightarrow H$ , taki że  $\ker(f) = K$  i skorzystać z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmie grup).

- (a)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ,  $H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ .
- (b)  $G = (\mathbb{R}^2, +)$ ,  $K = \text{Lin}\{(1, 2)\}$ ,  $H = (\mathbb{R}, +)$ .
- (c)  $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $K = \{1, -1, i, -i\}$ ,  $H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ .
- (d)  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $K = \{1, -1\}$ ,  $H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ .
- (e)  $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$ ,  $K = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $H = (\mathbb{Z}, +)$ .

7. Mamy funkcję

$$f : (\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = 4x - 2y;$$

która jest epimorfizmem grup (a nawet przestrzeni liniowych).

- (a) Znaleźć  $\ker(f)$ .
  - (b) Wskazać podgrupę  $H < (\mathbb{R}^2, +)$ , taką że  $(\mathbb{R}^2, +)$  jest produktem wewnętrznym podgrup  $\ker(f)$  i  $H$  (w szczególności:  $(\mathbb{R}^2, +) \cong \ker(f) \times H$ ).
8. Czy istnieje  $H < (\mathbb{Q}, +)$ , taka że  $(\mathbb{Q}, +)$  jest produktem wewnętrznym podgrup  $\mathbb{Z}$  i  $H$ ?
9. Czy grupa  $S_3$  jest izomorficzna z produktem  $G \times H$  dla pewnych nietrywialnych grup  $G$  i  $H$ ?