ALGEBRA 1, Lista 8

Ćwiczenia 26.11.2019 i Konwersatorium 27.11.2019. Na Kolokwium 2 (3.12.2019) obowiązuje materiał z List 1 – 8 (czyli cała teoria grup na tym wykładzie).

0S. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności. Grupa kwaternionów Q_8 i klasyfikacja grup rzędu co najwyżej 8. Centrum grupy. Automorfizmy wewnętrzne grup: definicja, własności i przykłady. Grupa $\mathrm{Inn}(G)$ automorfizmów wewnętrznych grupy G, związek z centrum grupy $Z(G)$. Relacja sprzężenia w grupie G. Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1S. Znaleźć nietrywialne podgrupy $A, B < \mathbb{Z}_{15}$, takie że funkcja

$$f : A \times B \to \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a,b) = a +_{15} b$$

jest izomorfizmem.

2S. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

3K. Niech $\sigma = (1,2)(3,4,5) \in S_5$.
- (a) Wypisać wszystkie permutacje τ w grupie S_5, które są sprzężone z permutacją σ. Za każdym razem wskazać permutację f taką, że $\tau = \varphi_f(\sigma)$ (przypomnienie: $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$).
- (b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w S_5, które są przemienne z permutacją σ (wskazówka: τ jest przemienna z $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$).
- (c) Udowodnić, że zbiór z punktu (b) jest podgrupą grupy S_5.

4K. Załóżmy, że grupa G ma jedyną podgrupę H rzędu 25. Udowodnić, że $H \trianglelefteq G$. (wskazówka: dla $g \in G$, rozważyć podgrupę $\varphi_g(H) \leqslant G$).

5K. W następujących grupach G opisać klasy sprzężenia:
- (a) $G = Q_8$;
- (b) $G = D_3$;
- (c) $G = D_4$.

6. Czy istnieje monomorfizm grup $f : G \to H$? Jesli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz. (wskazówka: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa $S \leqslant H$, taka że $S \cong G$).
- (a) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{24}$,
- (b) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}$,
- (c) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{100}$,
- (d) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = S_8$,
- (e) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +)$
- (f) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +)$,
- (g) $G = S_3,\ H = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$,
- (h) $G = D_4,\ H = S_8$.

7. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
- (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$;
- (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$;
- (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.

8. Czy istnieją podgrupy właściwe K, H grupy kwaternionów Q_8, takie że Q_8 jest produktem wewnętrznym K i H?

9. Udowodnić, że każda podgrupa grupy kwaternionów Q_8 jest jej dzielnikiem normalnym.

10. Udowodnić, że:

$$Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$