

ALGEBRA 1, Lista 9

Konwersatorium 4.12.2019 i materiał na Kartkówkę 7 (10.12.2019).

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień (przeładowany, z jedyneką), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina, ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Wylczenie, które pierścienie \mathbb{Z}_n są ciałami.

1S. Niech R będzie pierścieniem $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(a) Napisać tabelki działań w pierścieniu R .

(b) Wskazać dzielniki zera i elementy odwracalne w pierścieniu R .

2S. Określić działania \oplus i \odot w zbiorze \mathbb{Z} tak, by $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ był pierścieniem i funkcja

$$f : (\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad f(x) = x + 1$$

była izomorfizmem. Wskazać jedynekę i zero pierścienia $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

3K. Sprawdzić, czy poniższe (A, \oplus, \odot) są pierścieniami:

(a) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $a \oplus b = a + b$, $a \odot b = ab$ (dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych);

(b) $A = \mathbb{R}$, $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$, $a \odot b = a \cdot b$;

(c) $A = \mathbb{R}_{>0}$, $a \oplus b = a \cdot b$, $a \odot b = a^b$.

4K. Które z poniższych pierścieni są dziedzinami, a które ponadto są ciałami?

(a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ (z działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych).

(b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(c) \mathbb{Z}_4 .

(d) \mathbb{Z}_5 .

(e) \mathbb{Z}_6 .

(f) $\mathbb{Z}[i]$.

(g) $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (z działaniami dodawania i mnożenia liczb zespolonych).

(h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.