

ALGEBRA 1, Lista 12

Konwersatorium 11.01.2021, Ćwiczenia 12.01.2021 i 13.01.2021. Na Kolokwium 3 (19.01.2021 i 20.01.2021) obowiązuje materiał z List 1 – 12.

- 0S. Materiał teoretyczny: Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R . Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R . Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w \mathbb{Z} oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R . Twierdzenie Bézout(a). Podstawowe twierdzenie arytmetyki. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym.
- 1S. W podanym pierścieniu euklidesowym R , dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
- $a = 33, b = 42, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1, b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X^4 + 2, b = X^3 + 3, R = \mathbb{Z}_5[X]$.
- 2S. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
- $a = 5, b = -5, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2, b = 4, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 5, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 6, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 5, R = \mathbb{Z}[X]$.
 - $a = 1 + i, b = 1 - i, R = \mathbb{Z}[i]$.
 - $a = 1 + i, b = 2 + i, R = \mathbb{Z}[i]$.
- 3K. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
- 105 w \mathbb{Z}_{351} .
 - 11 w \mathbb{Z}_{2020} .
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
 - $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.
- 4K. Które z liczb $1, 2, 3, 4, 5, 1 + i, 2 + i, 3 + i, 4 + i, 5 + i$ są nierozkładalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i]$?
5. W podanym pierścieniu euklidesowym R , dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy r, s, t takie, że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
- $a = 2891, b = 1589, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = X^4 + X + 1, b = X^3 + X^2 + X, R = \mathbb{Z}_3[X]$.
 - $a = 4 - i, b = 1 + i, R = \mathbb{Z}[i]$.
6. Wskazać nierozkładalny wielomian:
- stopnia 2 należący do $\mathbb{Z}_5[X]$;
 - stopnia 3 należący do $\mathbb{Z}_7[X]$;
 - stopnia 4 należący do $\mathbb{Z}_2[X]$.

7. Załóżmy, że R jest dziedziną, $n \in \mathbb{N}$ i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n . Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R).
8. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3 + 5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu \mathbb{Z}_6 ? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.
9. Załóżmy, że R jest dziedziną, element $p \in R$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że element $q = up$ też jest nierozkładalny.
10. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.
 - (a) Udowodnić, że $(X - a)|(X^{p-1} - 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.
 - (b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1} - 1)/(X - a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $p = 5$ i $a = 2$.
 - (c) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[X]$ zachodzi:

$$X^{p-1} - 1 = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot \dots \cdot (X - p + 1).$$