ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 18.01.2021.

0S. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Opis elementów nierozkładalnych pierścienia $\mathbb{C}[X]$ oraz pierścienia $\mathbb{R}[X]$. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu. Lemat Gaussa i Kryterium Eisensteina.

1S. Załóżmy, że R jest dziedziną oraz $a, b \in R \setminus \{0\}$. Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$ takie, że $aq = b$. Wtedy q nazywamy *ilorazem* b przez a i oznaczamy $\frac{b}{a}$ (podobnie jak oznaczamy ułamek).

2K. Udowodnić, że następujące liczby rzeczywiste są niewymierne, odwołując się do twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

3K. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:
- (a) $X^5 - 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
- (b) $X^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
- (c) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$.

4K. (a) Załóżmy, że wielomiany $W, V \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ są *względnie pierwsze*, tzn. 1 jest największym wspólnym dzielnikiem W i V. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S, T \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:

$$\frac{1}{WV} = \frac{S}{W} + \frac{T}{V}.$$

(b) Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $T \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V}{W}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz W jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia $\leqslant 2$ (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne!).