**ALGEBRA 1, Lista 15**

Konwersatorium 1.02.2021, Ćwiczenia 2.02.2021 i 3.02.2021.

0S. Materiał teoretyczny: Ideały maksymalne oraz związek pomiędzy ideałami maksymalnymi i ciałami. Charakterystyka ciała i podciało. Równania algebraiczne w ciele $F$, znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu $K$ ciała $F$. Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie) i nieskończoność. Ciała proste. Podciało proste ciała $F$. Liczba elementów ciała skończonego. Funkcja Frobeniusa w ciele charakterystyki $p > 0$.

1S. Sporządzić tabelki działań ciała:
 (a) 4-elementowego,
 (b) 9-elementowego.

2S. Które z podanych pierścieni są ciałami?
 (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
 (b) $\mathbb{Z}_4$.
 (c) $\mathbb{Z}_{17}$.
 (d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$.
 (e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.
 (f) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$.
 (g) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$.
 (h) $M_n(\mathbb{R}),\ n > 1$.

3K. Rozważmy pierścień

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(podpierścień ciała liczb rzeczywistych) oraz funkcję

$$d : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{N}, \quad d\left(n + m\sqrt{2}\right) = \left|n^2 - 2m^2\right|.$$

 (a) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ przedstawienie $x$ w postaci $n + m\sqrt{2}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) jest jednoznaczne.
 (b) Udowodnić, że dla $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy $d(xy) = d(x)d(y)$.
 (c) Udowodnić, że dla $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mamy: $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(x) = 1$.
 (d) Wskazać nieskończenie wiele elementów $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$.
 (e) Znaleźć rozkład liczby 2 na iloczyn czynników nierozkładalnych w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

4K. Omówić twierdzenie Bézout(a) dla pierścienia wielomianów nad dowolnym pierścieniem przemiennym z 1.

5. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + x + 1 = 0$:
 (a) w ciele $\mathbb{Z}_7$;
 (b) w ciele $\mathbb{Z}_5$;
 (c) w ciele liczb rzeczywistych;
 (d) w ciele liczb zespolonych.

6. Traktujemy ciało $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$.
 (a) Udowodnić, że zbiór $\{1, \sqrt{2}\}$ jest bazą tej przestrzeni liniowej.
 (b) Mamy funkcję

$$f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \qquad f(x) = \left(1 + \sqrt{2}\right)x.$$

Sprawdzić, że $f$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ nad ciałem $\mathbb{Q}$, a następnie obliczyć macierz przekształcenia liniowego $f$ w bazie $\{1, \sqrt{2}\}$.

7. Traktujemy ciało $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że wymiar tej przestrzeni liniowej jest nieskończony (dla zainteresowanych: wymiar ten jest nieprzeliczalny i równy $2^{\aleph_0}$).

8. Załóżmy, że $F$ jest ciałem oraz $I \trianglelefteq F$. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.
9. Załóżmy, że $f : F_1 \to F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że $f$ jest monomorfizmem.
10. Załóżmy, że $R$ jest niezerowym pierścieniem przemiennym z 1 oraz ideał $I \triangleleft R$ jest taki, że $I \neq R$. Mówimy, że ideał $I$ jest *pierwszy*, gdy dla wszystkich $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$ pociąga, że $a \in I$ lub $b \in I$. Udowodnić, że:
    (a) ideał $I$ jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień $R/I$ jest dziedziną;
    (b) jeśli $I$ jest maksymalny, to $I$ jest pierwszy.
11. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}[X]$ oraz $W(z) = 0$. Udowodnić, że:
    (a) wielomian
    $$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) = (X - z)(X - \bar{z})$$
    dzieli $W$ w pierścieniu $\mathbb{R}[X]$;
    (b) $W(\bar{z}) = 0$.

    Wskazówka: podzielić z resztą.