ALGEBRA 1, Lista 2

Konwersatorium 12.10.2020, Ćwiczenia 13.10.2020 i 14.10.2020.

0S. Materiał teoretyczny: Działania dodawania i mnożenia modulo n. Pojęcie podgrupy, homomorfizmu grup i izomorfizmu grup. Notacja multyplikatywna i addytywna. Grupy permutacji i grupy macierzy. Grupy izometrii własnych prostokąta i trójkąta równobocznego, grupa czwórkowa Kleina K_4. Izomorfizm grupy izometrii własnych trójkąta równobocznego i S_3.

1S. Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze reszt modulo 6, to znaczy w zbiorze $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$.

2S. Rozważmy bijekcję $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ o następujących wartościach:

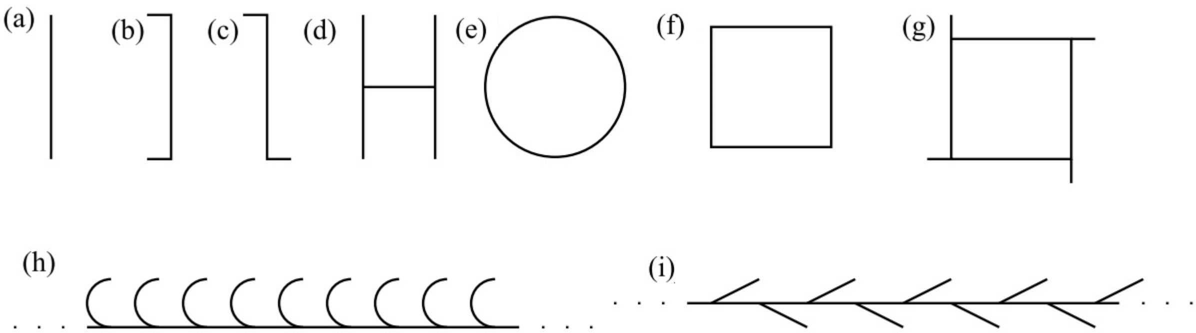
$$f(0) = 3,\ f(1) = 5,\ f(2) = 0,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ f(5) = 4.$$

Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze $\mathbb{Z}_6$ przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f, zaś $\circ$ działaniem indukowanym w zbiorze $\mathbb{Z}_6$ przez działanie $\cdot_6$ poprzez funkcję f. Sporządzić tabelki działań $*$ i $\circ$.

3. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i $A \subseteq G$. Dla poniższych $(G, \cdot)$ i A sprawdzić, czy podzbiór A jest zamknięty na działanie $\cdot$. Jeśli tak, to sprawdzić czy A jest podgrupą grupy $(G, \cdot)$.
   (a)S $G = (\mathbb{C}, +)$; $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (okrąg).
   (b)S $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = (0, \infty)$ (dodatnie liczby rzeczywiste).
   (c)S $G = S_3$; $A = \left\{ \mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
   (d)K $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$; $A = \{0, 2, 4, 6\}$.
   (e)K $G = (\mathbb{Z}, +)$; $A = \mathbb{Z}_7$.
   (f)K $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (n-te pierwiastki z 1).

4. Niech G będzie grupą. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g, h \in G$ udowodnić, że:
   (a) $g^k g^l = g^{k+l}$;
   (b) $(g^k)^l = g^{kl}$;
   (c) $(gh)^{-1} = h^{-1} g^{-1}$;
   (d) jeśli $gh = hg$, to $(gh)^k = g^k h^k$.

5. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur płaskich. Które z tych grup są ze sobą izomorficzne? Które z tych grup są abelowe?



6. Załóżmy, że w grupie G mamy $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.
7. Udowodnić, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $(ab)^2 = a^2b^2$ dla wszystkich $a, b \in G$.
8. Wskazać 6 różnych izomorfizmów między grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego i grupą permutacji S_3.