ALGEBRA 1, Lista 4

Konwersatorium 26.10.2020, Ćwiczenia 27.10.2020 i 18.11.2020.

Niech G będzie grupą, $g \in G$, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

0S. Materiał teoretyczny: Warstwy lewostronne i warstwy prawostronne podgrupy H grupy G. Własności warstw. Indeks podgrupy H w grupie G. Twierdzenie Lagrange'a oraz wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona.

1S. Wyznaczyć wszystkie możliwe:
   (a) rzędy elementów $g \in \mathbb{Z}_{20}$;
   (b) rzędy elementów $g \in S_5$;
   (c) rzędy elementów $g \in D_6$.

2S. Załóżmy, że $\mathrm{ord}(g) = 10$. Wyznaczyć $\mathrm{ord}(g^2), \mathrm{ord}(g^5), \mathrm{ord}(g^3)$.

3S. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H\backslash G$, dla:
   (a) $G = \mathbb{Z}_{12},\ H = \{0, 6\}$;
   (b) $G = S_3,\ H = \{\mathrm{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$;
   (c) $G = \mathbb{Z},\ H = 5\mathbb{Z}$.

4K. Załóżmy, że $\mathrm{ord}(g) = n$ i niech $r = r_n(k)$.
   (a) Udowodnić, że $g^k = g^r$.
   (b) Udowodnić, że $\mathrm{ord}(g^k) = l$, gdzie l jest najmniejszą liczbą $\geqslant 1$ taką, że $n|kl$.
   (c) Udowodnić, że $\mathrm{ord}(g^k) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy k i n są względnie pierwsze.

5. Wyznaczyć wszystkie możliwe rzędy elementów $g \in D_n$.

6. Niech

$$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \mathrm{NWD}(k, n) = 1\}.$$

   Udowodnić, że:
   (a) mnożenie modulo n (oznaczane $\cdot_n$) jest działaniem na $\mathbb{Z}_n^*$;
   (b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą (łączność $\cdot_n$ była omówiona na wykładzie).

7. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów) G/H i $H\backslash G$, dla:
   (a) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_\pi, O_{3\pi/2}\}$;
   (b) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, S\}$, gdzie S jest dowolną symetrią osiową;
   (c) $G = S_n,\ H = A_n$, gdzie A_n to zbiór permutacji parzystych w S_n (udowodnić, że A_n jest podgrupą S_n!).

8. Załóżmy, że G jest generowana przez zbiór $\{g, h\} \subseteq G$ taki, że $\mathrm{ord}(g) = 5,\ \mathrm{ord}(h) = 4$ oraz $gh = hg^2$.
   (a) Niech $K = \langle g \rangle$ oraz $H = \langle h \rangle$. Udowodnić, że $K \cap H = \{e\}$.
   (b) Udowodnić, że każdy element grupy G jest postaci $g^i h^j$ dla pewnych $0 \leqslant i < 5$ oraz $0 \leqslant j < 4$ oraz udowodnić, że to przedstawienie jest jednoznaczne. Ile elementów ma grupa G?
   (c) Napisać wzór na iloczyn elementów grupy G zapisanych w postaci $g^i h^j$ jak w podpunkcie (b) powyżej.
   Można ten podpunkt ominąć, jeśli brakuje czasu na ćwiczeniach.

9. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:

$$r_{13}\left(125^{342}\right),\ r_{29}\left(321^{485}\right),\ r_{31}\left(321^{485}\right).$$