ALGEBRA 1, Lista 6

Konwersatorium 16.11.2020, Ćwiczenia 17.11.2020 i 2.12.2020.

0S. Materiał teoretyczny: Grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie grup. Produkt grup: definicja, własności, przykłady. Twierdzenie o produkcie wewnętrznym podgrup grupy.

1S. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Definiujemy:

$$kA := \{kx \mid x \in A\}$$

(x dodajemy do siebie k razy). Udowodnić, że kA jest dzielnikiem normalnym A.

2S. Znaleźć $k \in \mathbb{N}_{>0}$ takie, że:
  (a) $\mathbb{Z}_{12}/3\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$;
  (b) $\mathbb{Z}_8/6\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_k$;
  (c) $\mathbb{Z}_{12}/5\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$.

3. Czy następujące grupy są cykliczne?
  (a)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$;
  (b)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
  (c)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$;
  (d)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

4K. Załóżmy, że $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $k|n$. Udowodnić, że:
  (a) istnieje jedyny homomorfizm $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k$, taki że $\varphi(1) = 1$;
  (b) dla homomorfizmu φ z punktu (a) powyżej mamy:

$$\ker(\varphi) = \langle k \rangle = k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{k}};$$

  (c) $\mathbb{Z}_n/k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_k$.

5. W grupie ilorazowej G/H wyznaczyć rząd elementu $a + H$, gdzie:
  (a) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;
  (b) $G = (\mathbb{Z}_{12}, +_{12}),\ H = \{0, 3, 6, 9\},\ a = 5$;
  (c) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (3\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;
  (d) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ a = \sqrt{2}$.

6. Rozważamy grupy G, H oraz dzielnik normalny $K \lhd G$. W każdym z poniższych przypadków udowodnić, że $G/K \cong H$ (wskazać epimorfizm $f : G \to H$, taki że $\ker(f) = K$ i skorzystać z zasadniczego twierdzenia o homomorfiźmie grup).
  (a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
  (b) $G = (\mathbb{R}^2, +),\ K = \mathrm{Lin}\{(1, 2)\},\ H = (\mathbb{R}, +)$.
  (c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1, i, -i\},\ H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
  (d) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
  (e) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +),\ K = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\},\ H = (\mathbb{Z}, +)$.

7. Mamy funkcję

$$f : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = 4x - 2y;$$

która jest epimorfizmem grup (a nawet przestrzeni liniowych).
  (a) Znaleźć $\ker(f)$.
  (b) Wskazać podgrupę $H < (\mathbb{R}^2, +)$, taką że $(\mathbb{R}^2, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\ker(f)$ i H (w szczególności: $(\mathbb{R}^2, +) \cong \ker(f) \times H$).

8. Czy istnieje $H < (\mathbb{Q}, +)$, taka że $(\mathbb{Q}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\mathbb{Z}$ i H?

9. Czy grupa S_3 jest izomorficzna z produktem $G \times H$ dla pewnych nietrywialnych grup G i H?