ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 19.01.2022 i Ćwiczenia 25.01.2022.

0S. Materiał teoretyczny: Twierdzenie Bézout(a). Podstawowe twierdzenie arytmetyki. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Opis elementów nierozkładalnych pierścienia $\mathbb{C}[X]$ oraz pierścienia $\mathbb{R}[X]$. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu. Lemat Gaussa i Kryterium Eisensteina.

1S. Załóżmy, że R jest dziedziną oraz $a, b \in R \setminus \{0\}$. Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$, takie że $aq = b$. Wtedy q nazywamy *ilorazem* b przez a i oznaczamy $\frac{b}{a}$ (podobnie jak oznaczamy ułamek).

2S. Udowodnić, że następujące liczby rzeczywiste są niewymierne, odwołując się do twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

3K. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:
   (a) $X^5 - 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
   (b) $X^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (c) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$.

4K. (a) Załóżmy, że wielomiany $W, V \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ są *względnie pierwsze*, tzn. 1 jest największym wspólnym dzielnikiem W i V. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S, T \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:
$$\frac{1}{WV} = \frac{S}{W} + \frac{T}{V}.$$
   (b) Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $T \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V}{W}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz W jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia $\leqslant 2$ (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne!).

5. Wskazać nierozkładalny wielomian:
   (a) stopnia 2 należący do $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (b) stopnia 3 należący do $\mathbb{Z}_7[X]$;
   (c) stopnia 4 należący do $\mathbb{Z}_2[X]$.

6. Załóżmy, że R jest dziedziną, $n \in \mathbb{N}$ i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n. Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R).

7. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3 + 5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.

8. Załóżmy, że R jest dziedziną, element $p \in R$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że element $q = up$ też jest nierozkładalny.

9. Niech R będzie dziedziną i $a, b \in R$. Załóżmy, że a nie dzieli b oraz element a jest nierozkładalny. Udowodnić, że największy wspólnik dzielnik a i b to 1.

10. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.
   (a) Udowodnić, że $(X - a)|(X^{p-1} - 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.
   (b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1} - 1)/(X - a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $p = 5$ i $a = 2$.
   (c) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[X]$ zachodzi:
$$X^{p-1} - 1 = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot \ldots \cdot (X - p + 1).$$