ALGEBRA 1, Lista 15

Konwersatorium 2.02.2021.

0S. Materiał teoretyczny: Ideały maksymalne oraz związek pomiędzy ideałami maksymalnymi i ciałami. Charakterystyka ciała i podciało. Równania algebraiczne w ciele F, znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu K ciała F. Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie) i nieskończoność. Ciała proste. Podciało proste ciała F. Liczba elementów ciała skończonego. Funkcja Frobeniusa w ciele charakterystyki $p > 0$.

1S. Sporządzić tabelki działań ciała:
   (a) 4-elementowego,
   (b) 9-elementowego.

2K. Które z podanych pierścieni są ciałami?
   (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
   (b) $\mathbb{Z}_4$.
   (c) $\mathbb{Z}_{17}$.
   (d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$.
   (e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.
   (f) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$.
   (g) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$.
   (h) $M_n(\mathbb{R}),\ n > 1$.

3K. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + x + 1 = 0$:
   (a) w ciele $\mathbb{Z}_7$;
   (b) w ciele $\mathbb{Z}_5$;
   (c) w ciele liczb rzeczywistych;
   (d) w ciele liczb zespolonych.

4K. Załóżmy, że F jest ciałem oraz $I \trianglelefteq F$. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.

5K. Załóżmy, że $f : F_1 \to F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest monomorfizmem.