ALGEBRA 1, Lista 5

Konwersatorium 3.11.2021.

0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady.

1S. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfimem.

2S. Udowodnić, że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

3K. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \leqslant S_G$.

4K. Załóżmy, że G, H są grupami oraz grupa G jest cykliczna, skończona i generowana przez element a. Załóżmy, że $b \in H$ oraz $\mathrm{ord}(b)$ jest skończony i dzieli $\mathrm{ord}(a)$. Udowodnić, że:

(a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$;

(b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}_n$ jest postaci:

$$\varphi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad \varphi_k(x) = k \cdot_n x;$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_n$.

5K. Załóżmy, że G jest grupą cykliczną, nieskończoną i generowaną przez element a, H jest dowolną grupą oraz $b \in H$. Udowodnić, że:

(a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$;

(b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}$ jest postaci:

$$\psi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \psi_k(x) = kx;$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.