ALGEBRA 1, Lista 6

Konwersatorium 10.11.2021, Ćwiczenia 23.11.2021.

0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady. Twierdzenie Cayley'a. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Dzielnik normalny. Charakteryzacja monomorfizmu grup przy pomocy jądra.

1S. Niech $S \in D_4$ będzie symetrią osiową (dowolną). Udowodnić, że podgrupa $\{\mathrm{id}, S\} < D_4$ nie jest dzielnikiem normalnym w D_4.

2K. Grupa przekształceń afinicznych prostej to poniższy zbiór funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$A = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

(a) Udowodnić, że A jest grupą względem złożenia funkcji (podgrupą $S_{\mathbb{R}}$).

(b) Niech

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Udowodnić, że H jest podgrupą $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(c) Udowodnić, że $A \cong H$.

(d) Udowodnić, że H nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

3K. Niech $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

(a) Udowodnić, że każdy homomorfizm $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Q}$ jest trywialny, tzn. dla każdego $x \in \mathbb{Z}_n$ mamy $f(x) = 0$.

(b) Udowodnić, że każdy homomorfizm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_n$ jest trywialny, tzn. dla każdego $y \in \mathbb{Q}$ mamy $f(y) = 0$.

4. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup $f : G \to H$? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.

(a) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$, $f(1) = 1$.

(b) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}_2, +_2)$, $f(1) = 1$.

(c) $G = H = (\mathbb{R}, +)$, $f(1) = 99$.

(d) $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}, +)$, $f(8) = 3$.

(e) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(1) = 2$.

(f) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$, $H = (\mathbb{Z}_5, +_5)$, $f(1) = 1$.

5. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $f : G \to H$, gdzie:

(a) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;

(b) $G = (\mathbb{Z}_3, +_3)$, $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;

(c) $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$, $H = (\mathbb{Z}_6, +_6)$;

(d) $G = H = (\mathbb{Q}, +)$.

6. Czy następująca podgrupa H grupy G jest dzielnikiem normalnym?

(a) $G = D_4$, $H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$.

(b) $G = D_4$, $H = \{\mathrm{id}, O_{\pi}\}$.

(c) $G = S_4$, $H = \{\mathrm{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$.

7. Niech

$$H := \{\mathrm{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subset S_4.$$

Udowodnić, że:

(a) H jest podgrupą S_4;

(b) H jest dzielnikiem normalnym w S_4 (wskazówka: dla $\sigma \in S_4$ opisać $\sigma(1, 2)(3, 4)\sigma^{-1}$ i następnie skorzystać z odpowiedniego kryterium na dzielnik normalny z wykładu).